

现代应用数学丛书

几 何 学

[日]矢野健太郎 著

上海科学技术出版社

51.5
172

现代应用数学丛书

几 何 学

〔日〕矢野健太郎 著

孙 泽 瀛 译

zk611/10

上海科学技术出版社



內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的现代应用数学丛书之一的中译本。本书包括向量代数、向量分析、微分几何等三篇,分九章。简单扼要地介绍了这三方面的主要内容。在向量代数方面,除介绍了向量的基本运算及其应用之外,对于张量的概念也作了说明。在向量分析中,对于微分运算子、积分性质、曲线坐标等作了系统介绍,在微分几何一篇中,重点介绍了曲面论和黎曼空间的一些基本性质。本书可供高等学校数学系师生及工程技术人员参考。

现代应用数学丛书

几 何 学

原 书 名	几	何	学
原 著 者	(日)矢	野 健 太 郎	
原出版者	岩	波 书 店	
译 者	孙	泽 瀛	

上海科学技术出版社出版(上海瑞金二路450号)

上海市书刊出版业营业许可证出 093 号

上海市印刷四厂印刷 新华书店上海发行所发行

开本 850×1156 1/32 印张 4 字数 94,000

1961 年 8 月第 1 版 1965 年 12 月第 2 次印刷

印数 16,001—17,000

统一书号 13119·415 定价(科六) 0.60 元

出版說明

这一套书是根据日本岩波书店出版的“現代应用数学讲座”翻譯而成。日文原书共 15 卷 60 册，分成 A、B 两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成 42 种，不另分組編号，陸續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其內容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。书中收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短時間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国科学技术工作者可能是有所助益的。

由于日文原书是 1957 年起以讲座形式陸續出版的，写作時間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在某些譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书內容作一些評價，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注釋和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

08318

譯 者 序

这本书的編写方法和一般的微分几何学不同，主要是針對物理学和力学方面的应用而編写的。为此，它着重叙述了向量和其扩充的張量的一些基础知識及其与物理学和力学有关的内容。

首先，它引进了向量代数的一般知識，根据向量在三重系变换下的变换規律很自然地引入了張量概念，作为向量的扩充。

其次，对向量分析的部分，主要研究物理和力学中所需要的向量場、張量場、梯度、散度和旋度等一些概念。随后就叙述了向量的积分，这也是对实际应用很有意义的一节。这里还引进了曲綫坐标作为后文应用的准备。

最后，在微分几何部分，扼要地叙述了曲面論和黎曼空間的主要内容。在卷末还极概略地提到一点李微分的内容。这是一种新的微分运算子，它可以应用于数量、向量、張量以及其他几何量。

本书的内容安排，尽量照顾到应用是一个特点。但是在叙述过程中，理論联系实际仍嫌不够，許多可以应用到的流体力学、彈性力学、电动力学的内容沒有提到或很少提到，实际例証也举得不多。希望讀者参考有关书藉以弥补不足。

笔者的写法很簡洁，一切公式的推导以及定理的証明，几乎都用最簡單的、直接的方法，这可說是本书又一个特点。但其中有一些定理，如三重向量积公式，梯度和旋度的概念，只介紹了分析公式，如能扼要地提一下几何及物理意义，可能对讀者更有帮助。

本书对于学习場論（向量分析）、張量分析以及黎曼几何的同志，可以作为比較省力的入門讀物。因此，值得向讀者推荐。

本譯本承錢端壯教授协助审校，特此致謝。

孙 澤 源 1961年7月

目 录

出版說明

譯者序

第1篇 向量代数	1
第1章 定义与初等运算	1
§ 1 向量的定义与表現	1
§ 2 向量的加法与減法	2
§ 3 向量的綫性相关性与綫性无关性	5
§ 4 解析几何学上的应用	8
第2章 內积与外积	10
§ 5 向量的內积	10
§ 6 向量內积的分配法則	11
§ 7 向量的外积	12
§ 8 向量外积的分配法則	13
第3章 向量代数的一些公式	17
§ 9 数量三重积	17
§ 10 向量三重积	19
§ 11 向量三重系	20
§ 12 三重系的变换	24
§ 13 張量	25
第2篇 向量分析	29
第4章 向量的微分	29
§ 14 向量的微分	29
§ 15 在空間曲綫論中的应用	31
§ 16 在运动学中的应用	35
第5章 微分运算子	40
§ 17 数量的梯度	40
§ 18 向量的散度	43
§ 19 向量的旋度	47
§ 20 关于梯度、散度、旋度的一些公式	48

第6章	向量的积分	51
§ 21	綫积分	51
§ 22	面积分	53
§ 23	关于散度的定理	55
§ 24	Stokes 定理	57
§ 25	Green 定理	61
第7章	曲綫坐标	63
§ 26	曲綫坐标	63
§ 27	基本形式	65
§ 28	关于曲綫坐标系的支量	68
§ 29	基本方程	72
§ 30	协变微分	75
§ 31	張量 $e_{\nu\mu\lambda}$ 和 $e^{\nu\mu\lambda}$	78
§ 32	梯度	81
§ 33	散度	83
§ 34	旋度	85
第3篇	微分几何	88
第8章	曲面論	88
§ 35	曲面	88
§ 36	基本方程	91
§ 37	Gauss 与 Codazzi 方程	94
§ 38	測地綫	99
§ 39	Meusnier 定理	101
§ 40	曲率綫	104
§ 41	漸近曲綫	106
第9章	Riemann 空間	108
§ 42	Riemann 空間	108
§ 43	向量	109
§ 44	張量	110
§ 45	Levi-Civita 平行性	112
§ 46	曲率張量	114
§ 47	Lie 微分	117

第1篇 向量代数

第1章 定义与初等运算

§1 向量的定义与表现

几何学及物理学里,有綫段长、三角形面积、四面体体积、质量、温度、功、能量、电荷等一类的量,它們在测度单位規定后,可单由一个数值完全表示出来,又有平行移动、速度、加速度、力等一类的量,它們在测度单位規定后,不能单由一个数值而要附以方向才能完全表示出来。

前一种量,那就是测度单位規定后单由一个数值完全表示出来并服从普通代数运算法则的量,称为数量(或标量)。

与此相反,后一种量,那就是测度单位規定后不能单由一个数值表示还要指定方向才能完全表示出来、服从以下列举的特殊运算法则的量,称为向量(或矢量)。

向量既然是具有数值与方向的量,过空間任意一点,例如說过点 O 的有向綫段 OA 就能完全把它表示出来, OA 之长表示它的数值, OA 的方向表示它的方向。这时 O 称为它的起点, A 称为它的終点。为了使有向綫段清楚地表示一个向量起見,有时在写法上加一个箭头,写成 \overrightarrow{OA} 。

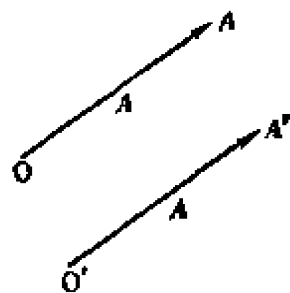


图 1.1

此外,为了书写的便利起見,常用一个字母来表示向量。我們采用普通的小写字母,例如 a ,表示数量,以粗

黑的大写字母,例如 A , 表示向量。这就是說

$$A = \overrightarrow{OA}.$$

过空間的另一点 O' 引有向綫段 $O'A'$, 以向量 A 的数值定这条綫段的长度, 以向量 A 的方向定这条綫段的方向, 那么 $\overrightarrow{O'A'}$ 仍表示同一向量 A 。这就是說, 空間內具有同一长度、同一方向的一切有向綫段表示同一向量。

向量 A 用有向綫段 \overrightarrow{OA} 表示时, 綫段 OA 之长称为向量 A 的长, 或大小, 或绝对值, 以 $|A|$ 或 a 表示。

长度为1的向量叫做单位向量。

§2 向量的加法与减法

正如前一节所說的, 向量是可用具有长度与方向的有向綫段表示的一种量, 而且服从一套特殊的运算規則。以下就要順次地說明这套运算規則。

首先, 向量 A 与向量 B 之和 $A+B$ 是这样定义的: 以表示向量 A 的有向綫段 \overrightarrow{OA} 之終点 A 作为起点, 引表示向量 B 的有向綫段 \overrightarrow{AC} , 那么, 有向綫段 \overrightarrow{OC} 所表示的向量就規定为它們的和。向量 A 加向量 B 构成向量 $A+B$ 的上述法則称做向量加法的三角形法則。

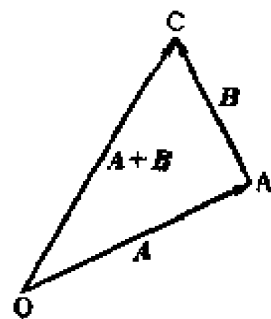


图 2.1

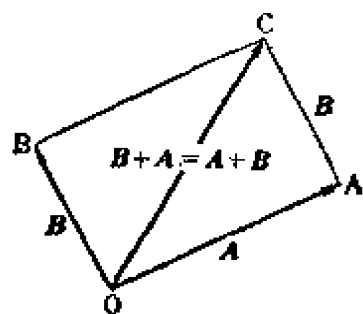


图 2.2

由于以上規定, 向量 A 与向量 B 之和 $A+B$ 也可以用如次的方式作出来。如以有向綫段 \overrightarrow{OA} 表示向量 A , 有向綫段 \overrightarrow{OB} 表示向量 B , 则表示和的有向綫段是以 OA , OB 为邻边的平行四边形 $OACB$ 之对角綫 \overrightarrow{OC} 。象这样由向量 A 加向量 B 作出向量 $A+B$ 的法則称做向量加法的平行四边形法則。

从以上的说明, 向量加法满足

$$(1) \quad A + B = B + A$$

是很明显的了。这就是说向量的加法满足交换律。

如果有三个向量 A, B, C , 要想作它们的和, 首先按照上述法则作出 $A + B$, 然后对所得的向量再按照上述法则加以 C 作出 $(A + B) + C$ 就行了。这时从图 2.3 很明显地看出

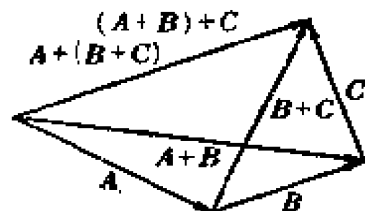


图 2.3

$$(2) \quad (A + B) + C = A + (B + C),$$

这就是说向量加法满足结合律。关于三个以上的向量之和可以同样地说明。

其次, 为了要说明向量 A 与向量 B 之差, 让我们考查方程式

$$A = B + X.$$

以有向线段 \overrightarrow{OA} 表示向量 A , 有向线段 \overrightarrow{OB} 表示向量 B , 从右图看出

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA},$$

因此, 有向线段 \overrightarrow{BA} 恰恰表示了向量 X . 除去与 \overrightarrow{BA} 同长同向的有向线段外, 其他任何有向线段不能代表满足上式的向量 X . 这就是说

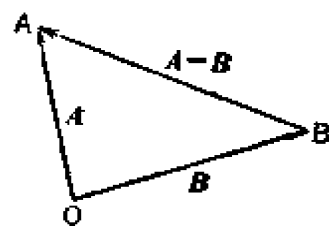


图 2.4

$$(3) \quad \text{满足方程 } A = B + X \text{ 的向量 } X \text{ 只有一个。}$$

这样的向量 X 称做向量 A 和 B 之差, 记以 $X = A - B$.

在以上的说明中, 如 $A = B$, 则点 A 与点 B 将重合在一起。因此, 向量 $A - B$ 将由以同一点作起点又作终点的有向线段来表示。这样的向量我们称之为零向量, 以 O 来表示。从而对于任意向量 A 有

$$A + O = O + A.$$

还有, 在方程 $A = B + X$ 里, 以 $A = O$, 则

$$\vec{O} = \vec{B} + \vec{X},$$

表示向量 \vec{B} 的有向线段 \vec{OB} 和代表向量 \vec{X} 的有向线段 $\vec{OB'}$ 利用向量加法的平行四边形法则把它们结合起来, 要使结合后的有向线段表示零向量 \vec{O} , 也就是说, 要得出起点和终点一致的向量, 就非得要 \vec{OB} 和 $\vec{OB'}$ 等长而反向不可。

对于向量 \vec{B} 而言, 和它等长而方向相反的向量记以 $-\vec{B}$ 。从此有

$$\vec{B} + (-\vec{B}) = (-\vec{B}) + \vec{B} = \vec{O}.$$

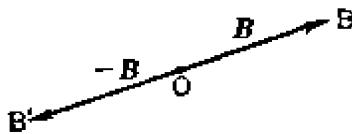


图 2.5

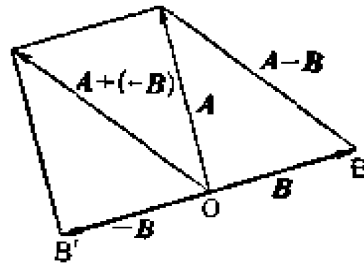


图 2.6

再说, 两个向量 \vec{A} 和 \vec{B} 给出时, 把 $\vec{A} - \vec{B}$ 的作图和图 2.6 比较, 清楚地看出

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}).$$

就向量加法 $\vec{A} + \vec{B}$ 而论, 如 $\vec{A} = \vec{B}$, 则得 $\vec{A} + \vec{A}$ 代表一个长是 \vec{A} 的二倍、方向与 \vec{A} 相同的一个向量。我们把这个向量记成 $\vec{A} \times 2$ 或 $2\vec{A}$ 。

更就一般情况讲, 设 α 是一个实数, \vec{A} 是一个向量, 规定 $\alpha\vec{A} = \vec{A}\alpha$ 表示一个向量: 当 α 是正数时, 它的长是 \vec{A} 的 α 倍, 它的方向和 \vec{A} 同向; 当 α 是负数时, 它的长是 \vec{A} 的 $|\alpha|$ 倍, 它的方向和 \vec{A} 反向。从这个规定, 立刻知道

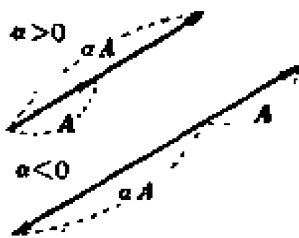


图 2.7

$$(-1)\vec{B} = -\vec{B}.$$

至于数量和向量的乘法满足以下三个法则, 由下图当可明白。

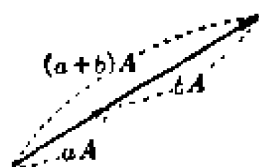


图 2.8

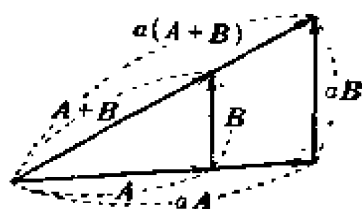


图 2.9

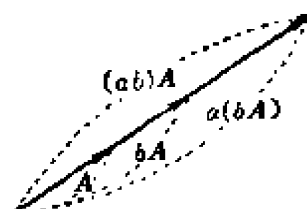


图 2.10

$$(4) \quad (a+b)A = aA + bA,$$

$$(5) \quad a(A+B) = aA + aB,$$

$$(6) \quad a(bA) = (ab)A.$$

§3 向量的綫性相关性与綫性无关性

一个向量 A 給出时, 与之同向或反向的向量 B 可写为 $B = lA$. 因此, 以 $l = -\frac{a}{b}$, 則

$$aA + bB = 0. \quad (3.1)$$

这里 b 不等于零。一般讲来, 对于两个向量 A, B , 如有不同时为零的两个数 a, b 使上式成立, 則称两向量綫性相关。对于任意向量 A 和零向量 O , 常有

$$0A + 1O = 0,$$

所以任意向量 A 和零向量 O 总是綫性相关的。我們今后假定 $A, B, C, D \dots$ 所表示的向量都不是零向量。

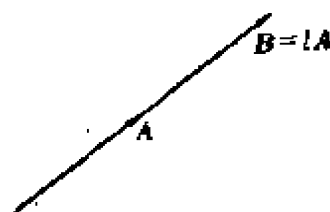


图 3.1

与向量 A 同向或反向的向量 B 既已看做是与 A 成綫性相关, 反之, 如 A 和 B 是綫性相关, 則 (3.1) 成立, 因此 a 和 b 中至少有一个不是零, 例如說 $b \neq 0$, 这时, $B = -\frac{a}{b}A$, B 和 A 是同向的或反向的。

如向量 A 和与它既非同向又非反向的向量 B 为已給, 則如图 3.2 所表明的, 要使式 (3.1) 成立, 只有 $a = b = 0$ 才行。象这样的

两个向量 A 与 B , 式(3.1)要成立只限于 $a=b=0$, 则称它们为线性无关。

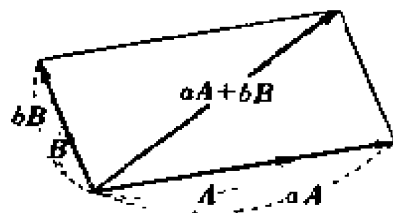


图 3.2

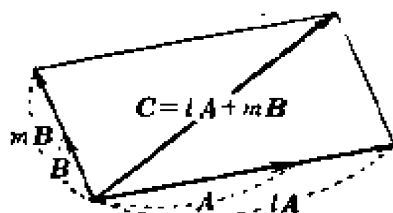


图 3.3

两个线性无关的向量 A 与 B 决定一个平面。因此, 如图 3.3 所表明的, 对于平面上任意向量 C , 满足 $C=lA+mB$ 的 l, m 存在而且可唯一地决定。于是, 如以 $l=-\frac{a}{c}, m=-\frac{b}{c}$, 则

$$aA+bB+cC=0. \quad (3.2)$$

这里 c 不等于零。一般讲来, 对于三个向量 A, B, C , 如有不同时为零的三个数 a, b, c 使上式成立, 称这三个向量为线性相关。

从此可知, 通过一点且在同一平面上的三个向量是线性相关的。反之, 如过一点引三个线性相关的向量 A, B, C , 则(3.2)成立, a, b, c 中至少有一个不是零。例如说 $c \neq 0$, 那么,

$$C = -\frac{a}{c}A - \frac{b}{c}B,$$

于是 A, B, C 在同一平面上。

其次, 过一点引三个向量 A, B, C , 如果它们不在同一平面上, 则如图 3.4 所表明的, 要使式(3.2)成立, 只限于 $a=b=c=0$

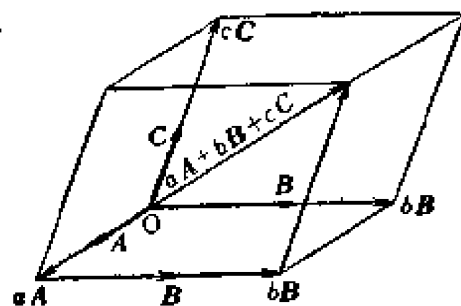


图 3.4

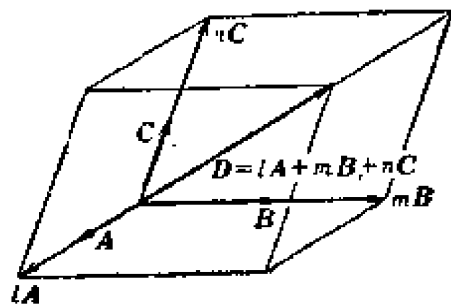


图 3.5

才成。象这样的三个向量 A, B, C , 只限于 $a=b=c=0$ 时式 (3.2) 成立, 称它們为綫性无关。

过一点引三个綫性无关的向量 A, B, C , 那么, 它們不会在同一平面上。因此, 如图 3.5 所表示的, 对于空間内任意向量 D , 满足 $D=lA+mB+nC$ 的 l, m, n 存在而且可唯一地决定。于是, 如以 $l=-\frac{a}{d}, m=-\frac{b}{d}, n=-\frac{c}{d}$, 則

$$aA+bB+cC+dD=0. \quad (3.3)$$

这里 d 不等于零。一般讲来, 对于四个向量 A, B, C, D , 如有不同时为零的四个数 a, b, c, d , 使上式成立, 則称这四个向量为綫性相关。

从此知道, 空間内的任意四个向量 A, B, C, D 一定是綫性相关的。因为, 如設 A 与 B 綫性相关, 則有 $aA+bB=0$, 这里的 a, b 不同时为零。于是

$$aA+bB+0C+0D=0$$

当然成立, 这就是說 A, B, C, D 是綫性相关。又如 A, B, C 綫性相关, 則必有不同时为零的 a, b, c 使 $aA+bB+cC=0$ 。于是

$$aA+bB+cC+0D=0$$

当然成立, 而 A, B, C, D 是綫性相关。最后設 A, B, C 是綫性无关, 則由前面所讲的, A, B, C, D 必綫性相关。在这最后的情况下, 式 (3.3) 的 $d \neq 0$ 。因为不然的話, a, b, c 中将有不为零的数使 $aA+bB+cC=0$, 这和 A, B, C 是綫性无关的假定不合, 因此得到

$$D=-\frac{a}{d}A-\frac{b}{d}B-\frac{c}{d}C=lA+mB+nC,$$

这时称 D 沿 A, B, C 的方向分解, 并稱 lA, mB, nC 为 D 在这三个方向的支量(或分量)。

§4 解析几何学上的应用

过空间一点 O , 考虑三个互相直交的单位向量 i, j, k . 假定它们的安排是按照坐标系的右旋法则处理的。

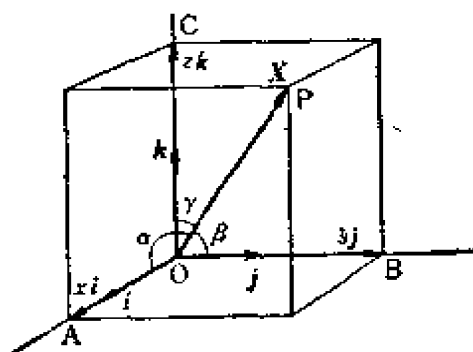


图 4.1

这样三个向量当然是线性无关的。因此, 过同一点 O 引任意向量 X , 它可写成

$$X = xi + yj + zk.$$

过向量 X 的终点 P 分别引平面平行于 j, k ; k, i ; i, j 两两所决定的平面, 设这些平面和向量 i, j, k 所定的直线分别交于 A, B, C 三点, 那么, x, y, z 的几何意义就是它们表示 OA, OB, OC (附适当正负号) 的长度。

这样的 x, y, z 称为向量 X 关于直交单位向量 i, j, k 的支量或坐标。

在空间解析几何学里, 以一点 O 为原点, 向量 i, j, k 所定的有向直线分别作为 x 轴、 y 轴、 z 轴的正向, 则一点 P 的直角坐标 (x, y, z) 就决定了。这种说法和以上的说法是完全一样的。

在设定直交轴 i, j, k 的空间里, 要决定一点 P 的位置, 常用从原点引到点 P 的向量 \overrightarrow{OP} , 这个向量有时称为位置向量。位置向量的坐标就是它终点的坐标。设向量

$$X = xi + yj + zk$$

之长是 r , 它和向量 i, j, k 所成的角, 即方向角分别记成 α, β, γ , 那么, 立刻知道

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \cos \beta, \quad z = r \cos \gamma.$$

这里的 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 称为向量 X 的方向余弦。因为

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

所以方向余弦满足

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

向量 A, B 如写成

$$A = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}, \quad B = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k},$$

则

$$A + B = (A_x + B_x) \mathbf{i} + (A_y + B_y) \mathbf{j} + (A_z + B_z) \mathbf{k}$$

$$aA = aA_x \mathbf{i} + aA_y \mathbf{j} + aA_z \mathbf{k},$$

因此, A, B 的坐标是 $(A_x, A_y, A_z), (B_x, B_y, B_z)$ 时, $A + B$ 的坐标就是 $(A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z)$, aA 的坐标就是 (aA_x, aA_y, aA_z) .

第2章 內积与外积

§5 向量的內积

給定两向量 A 与 B , 如它們的长分别为 a, b , 所成的角为 θ , 則称 $ab \cos \theta$ 为向量 A, B 的內积或数量积, 普通用 $A \cdot B$ 或 (A, B) 来表示。因此,

$$A \cdot B = B \cdot A = ab \cos \theta.$$

設表示向量 A, B 的有向綫段分別是 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$, 从 A 引 OB 之垂綫, 垂足記以 A' , 从 B 引 OA 之垂綫, 垂足記以 B' , 則因

$$OA' = a \cos \theta, \quad OB' = b \cos \theta,$$

所以可以得到

$$A \cdot B = OA' \cdot b \text{ 与 } A \cdot B = OB' \cdot a.$$

这就是說两个向量的內积可以当做是一个向量的长与另一向量在它上面的垂直射影所成的乘积。

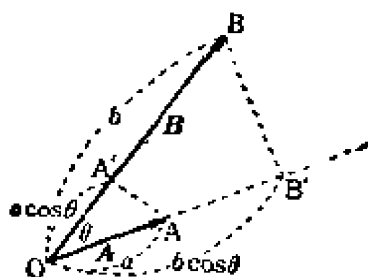


图 5.1

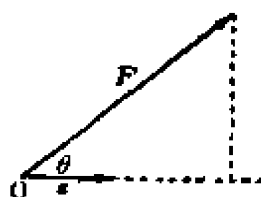


图 5.2

例 以力 F 施于一质点 O , 引起了变位 s , 則此力所作的功是 $F \cdot s$.

一向量 A 和它自身所成的內积, 因 $\theta = 0$, $\cos \theta = 1$, 故得到 $A \cdot A = a^2$. 因此, 向量 A 之长由

$$|A| = \sqrt{A \cdot A}$$

給出。

再如 A, B 互相垂直时, 則因 $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\cos \theta = 0$, 得到

$$A \cdot B = 0.$$

反之, 如 A, B 都不是零向量, 且 $A \cdot B = 0$, 則 $\cos \theta = 0$, 从而 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 亦即 A, B 直交。

由于以上的事实, 对于三个互相直交的单位向量 i, j, k , 显然有

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1, \quad j \cdot k = k \cdot i = i \cdot j = 0.$$

§6 向量內积的分配法則

給出三个向量 A, B, C , 以点 O 为起点引表示向量 A 的有向綫段 \overrightarrow{OA} , 其次, 以点 A 为起点引表示向量 B 的有向綫段 \overrightarrow{AB} , 則向量 $A+B$ 可用有向綫段 \overrightarrow{OB} 来表示。从点 A 与点 B 引直綫垂直于表示向量 C 的有向綫段 \overrightarrow{OC} , 其垂足分別記以 A', B' , 則

$$(A+B) \cdot C = OB' \cdot OC.$$

另一方面有

$$A \cdot C = OA' \cdot OC, \quad B \cdot C = A'B' \cdot OC,$$

于是得出

$$\begin{aligned} A \cdot C + B \cdot C &= (OA' + A'B') \cdot OC \\ &= OB' \cdot OC. \end{aligned}$$

由以上两式就得到

$$(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C.$$

这說明向量的內积滿足分配律。

两向量 A, B 关于三个互相直交的单位向量 i, j, k 分解成

$$A = A_x i + A_y j + A_z k, \quad B = B_x i + B_y j + B_z k,$$

这时,

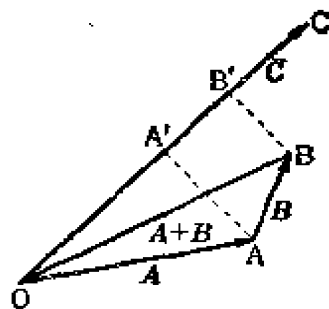


图 6.1

$$a = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}, \quad b = |\mathbf{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2},$$

而且

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z.$$

从此, 两向量 \mathbf{A}, \mathbf{B} 所成的角 θ 由

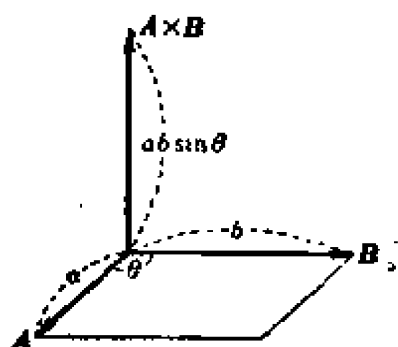
$$\cos \theta = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}$$

给出, 向量 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的直交条件为

$$A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 0.$$

§7 向量的外积

两个向量 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 给定后, 如果有第三个向量, 它的长度在数值上等于以 \mathbf{A}, \mathbf{B} 为邻边的平行四边形的面积, 它的方向垂直于



\mathbf{A}, \mathbf{B} 且和它们组成如右旋坐标系的方向, 则称这一向量为向量 \mathbf{A}, \mathbf{B} 的外积或向量积, 通常用 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 或 $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ 表示。

根据这一规定, 如 \mathbf{A}, \mathbf{B} 的长分别为 a, b , 它们所成的角为 θ , 沿 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 之方向的单位向量记以 \mathbf{e} , 则

图 7.1

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (ab \sin \theta) \mathbf{e}.$$

向量 \mathbf{A}, \mathbf{B} 的内积和它们的顺序无关, 即 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$; 与此相反, 向量 \mathbf{A}, \mathbf{B} 的外积是和它们的顺序有关系的。从外积的定义, 就知道向量 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 和向量 $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ 的长度相等, 方向相反。因此,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}.$$

例1 施于一点 P 的力 \mathbf{F} 关于一点 O 的力矩 \mathbf{M} , 如以 $\overrightarrow{OP} = \mathbf{x}$, 则

$$\mathbf{M} = \mathbf{x} \times \mathbf{F}.$$

例2 某个刚体绕一个轴以一定角速度 ω 回转, 这时在轴上以 ω 为长度, 右旋螺旋线的前进方向为方向的向量记以 ω , 在向量 ω 上取一点 O , 刚体上任

意一点 P 的速度设为 v , 以 $\overrightarrow{OP} = X$, 则

$$v = \omega \times X.$$

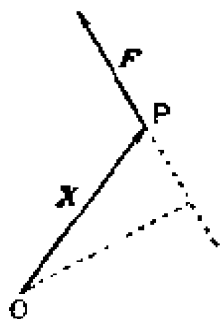


图 7.2

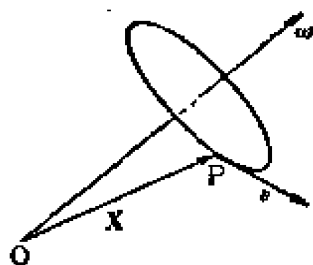


图 7.3

如果向量 A 与 B 是同向或反向的, 则因 $\theta = 0$ 或 $\theta = \pi$, 所以

$$A \times B = 0,$$

不消说

$$A \times A = 0.$$

反之, 如两向量 A 与 B 都不是零向量而且 $A \times B = 0$, 则 $\sin \theta = 0$, 从而 $\theta = 0$ 或 $\theta = \pi$, 因此, 向量 A 和向量 B 平行。

根据上面所说, 对于三个互成直交的单位向量 i, j, k , 当然会有

$$i \times i = j \times j = k \times k = 0,$$

$$j \times k = -k \times j = i, \quad k \times i = -i \times k = j, \quad i \times j = -j \times i = k.$$

§8 向量外积的分配法则

我們已經知道向量的內积适合分配律

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C.$$

向量的外积也适合分配律

$$(A + B) \times C = A \times C + B \times C.$$

以下就来证明它。

首先我們提出一桩值得注意的事情。外积 $A \times C$ 是以 A, C 所成平行四边形之面积为长, 垂直于 A, C 且

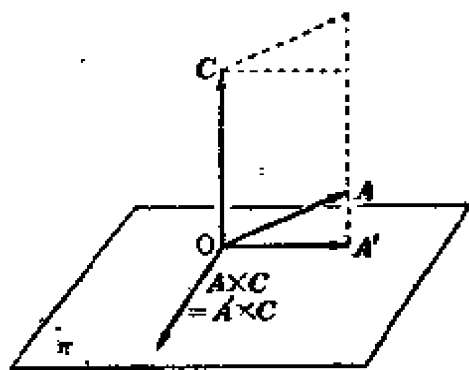


图 8.1

和它們形成如右旋坐标系的方向为方向的向量。因此，如通过起点 O 作垂直于向量 C 的平面 π ，則向量 $A \times C$ 在平面 π 內。

向量 A 在平面 π 上的垂直射影記以 A' ，則 A, C 所成的平行四边形面积等于 A', C 所成的长方形面积，而且 $A \rightarrow C$ 的旋轉方向和 $A' \rightarrow C$ 的旋轉方向相同。因此，

$$A \times C = A' \times C.$$

同样，如向量 B 在平面 π 上的垂直射影是 B' 的話，則

$$B \times C = B' \times C.$$

另一方面，因为向量 $A+B$ 在平面 π 上的垂直射影是 $A'+B'$ ，根据上面同样的理由，有

$$(A+B) \times C = (A'+B') \times C.$$

因此，要証明

$$(A+B) \times C = A \times C + B \times C,$$

只要証明

$$(A'+B') \times C = A' \times C + B' \times C$$

就好了。这就是說，在向量 A, B 同时垂直于向量 C 的情况下能够証明公式成立就好了。

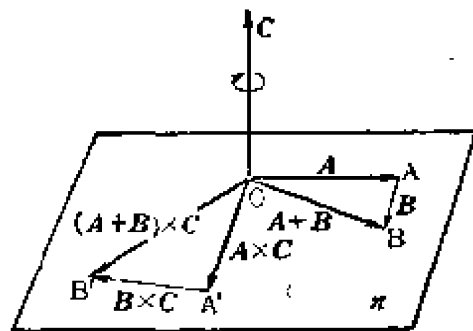


图 8.2

通过一点 O 引有向綫段表示 C ，然后在点 O 作这条有向綫段的垂直平面 π 。以 O 为起点引有向綫段 \vec{OA} 表示向量 A ，更以 A 为起点引有向綫段 \vec{AB} 表示向量 B ，則有向綫段 \vec{OB} 表示

向量 $A+B$ 。这些向量 $A, B, A+B$ 都在平面 π 上。

設向量 A, B, C 之长分別是 a, b, c 。因为向量 $A \times C$ 和向量 A, C 中的每一个都垂直，所以它在平面 π 內而且以 $a \cdot c$ 为其长。因此，要由向量 A 作出向量 $A \times C$ ，只要把 A 圍着向量 C 回繞(沿着图 8.2 中箭头所指方向)一个直角，再把它长 c 倍起来

就行了。同样,要由向量 B 作出向量 $B \times C$, 只要把 B 围着向量 C 回绕(沿着图中箭头所指方向)一个直角,再把它长 c 倍起来就好了。

因此,以向量 C 为轴把 $\triangle OAB$ 回绕(沿图中箭头所指方向)一个直角,然后以点 O 为中心相似地扩大(或缩小) c 倍就得到 $\triangle OA'B'$, 这时有向线段 $\overrightarrow{OA'}$ 表示向量 $A \times C$, 有向线段 $\overrightarrow{A'B'}$ 表示向量 $B \times C$, 有向线段 $\overrightarrow{OB'}$ 表示了向量 $(A+B) \times C$ 。由于

$$\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B'},$$

所以有

$$(A+B) \times C = A \times C + B \times C,$$

这就证明了所要证明的关系。

当两向量 A, B 分别关于三个互为直交的单位向量 i, j, k 分解成

$$A = A_x i + A_y j + A_z k, \quad B = B_x i + B_y j + B_z k$$

时,则

$$A \times B = (A_x i + A_y j + A_z k) \times (B_x i + B_y j + B_z k).$$

根据 i, j, k 两两所成的外积公式以及外积的分配法则,得到

$$A \times B = (A_y B_z - A_z B_y) i + (A_z B_x - A_x B_z) j + (A_x B_y - A_y B_x) k.$$

如利用行列式符号,则上式可改写成

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.$$

例1 施于点 P 之力 F 关于点 O 之力矩 M , 如以 $\overrightarrow{OP} = X$, 则

$$M = X \times F.$$

如果力 F 是几个力的合力,即

$$F = F_1 + F_2 + \cdots$$

则

$$X \times F = X \times (F_1 + F_2 + \cdots) = X \times F_1 + X \times F_2 + \cdots.$$

这就是說，合力关于一点 O 之力矩等于其各个分力关于点 O 之力矩之和。这也意味着力矩服从向量加法的平行四边形法則。

例 2 剛体以角速度 ω 繞軸旋轉，如在軸上取一点 O ，記 $\overrightarrow{OP} = \mathbf{X}$ ，則剛体上任意一点 P 的速度 \mathbf{v} 可用 $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{X}$ 表出[見 § 7, 例 2]。如一个剛体繞着过同一点 O 的好几个軸旋轉，其角速度分別为 $\omega_1, \omega_2, \dots$ 。那么，这个剛体上一点 P 因这些旋轉而引起的速度由

$$\mathbf{v}_1 = \omega_1 \times \mathbf{X}, \quad \mathbf{v}_2 = \omega_2 \times \mathbf{X}, \dots$$

給出。因此点 P 之速度 \mathbf{v} 由下式表达出

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots = \omega_1 \times \mathbf{X} + \omega_2 \times \mathbf{X} + \dots = (\omega_1 + \omega_2 + \dots) \times \mathbf{X}.$$

如以

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \dots$$

則

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{X}.$$

亦即，点 P 之速度等于剛体以角速度 ω 旋轉时所生之速度。这意味着角速度向量 ω 服从向量加法的平行四边形法則。

第3章 向量代数的一些公式

§9 数量三重积

通过一点 O 分别引有向线段 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 表示向量 A, B, C , 向量 $B \times C$ 之长等于以 OB, OC 为邻边之平行四边形 $OBDC$ 的面积, 它的方向垂直于 B, C 且和它们组成如右旋坐标系, 以有向线段 \overrightarrow{OP} 表示它。

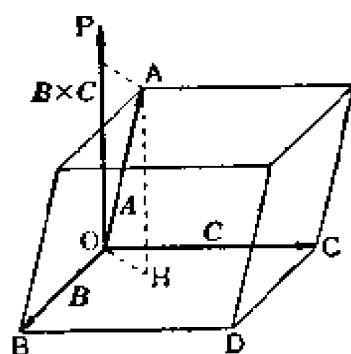


图 9.1

因此, $A \cdot (B \times C)$ 等于 \overrightarrow{OA} 在 \overrightarrow{OP} 上的垂直射影之长, 亦即从 A 引到平面 OBC 之垂线长 AH (A 与 $B \times C$ 所成的角成锐角时它是正的, 成直角时是 0, 成钝角时是负的), 和平行四边形 $OBDC$ 之面积的乘积。

这就是说, $A \cdot (B \times C)$ 等于以 OA, OB, OC 为相邻三边之平行六面体的体积, 这个量当 A 和 $B \times C$ 成锐角时为正, 成直角时为 0, 成钝角时为负。

向量 A 和 $B \times C$ 成锐角时, 我们称三向量 A, B, C 成正向; 成钝角时, 称它们成负向。

容易知道: 如三向量 A, B, C 成正向时, 则 B, C, A 和 C, A, B 也成正向; 如三向量 A, B, C 成负向时, 则 B, C, A 和 C, A, B 也成负向。

利用这种说法, 如三向量 A, B, C 成正向时, 则 $A \cdot (B \times C)$ 等于正的平行六面体体积; 如三向量成负向时, 则它等于负的平行六面体体积, 这个平行六面体是以 A, B, C 为三个相邻的棱组

成的。

从以上所說的,立刻得到

$$\begin{aligned} A \cdot (B \times C) &= B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B) \\ &= (A \times B) \cdot C = (B \times C) \cdot A = (C \times A) \cdot B \end{aligned}$$

以及

$$A \cdot (B \times C) = -A \cdot (C \times B) = -C \cdot (B \times A) = -B \cdot (A \times C).$$

如改写一下,以

$$A \cdot (B \times C) = [ABC],$$

則 $[ABC]$ 有如下性質:

- (1) A, B, C 成正向时, $[ABC] > 0$; 負向时, $[ABC] < 0$.
- (2) 三向量 A, B, C 循环代換时, $[ABC]$ 不变。
- (3) 三向量 A, B, C 中任意两个交換时, $[ABC]$ 的符号改变。

設三向量 A, B, C 关于互为直交的单位向量 i, j, k 分解为

$$A = A_x i + A_y j + A_z k$$

$$B = B_x i + B_y j + B_z k$$

$$C = C_x i + C_y j + C_z k,$$

則因

$$B \times C = (B_y C_z - B_z C_y) i + (B_z C_x - B_x C_z) j + (B_x C_y - B_y C_x) k,$$

而有

$$\begin{aligned} A \cdot (B \times C) &= A_x (B_y C_z - B_z C_y) + A_y (B_z C_x - B_x C_z) \\ &\quad + A_z (B_x C_y - B_y C_x), \end{aligned}$$

从而得出

$$[ABC] = A \cdot (B \times C) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}.$$

从这里更容易推得

$$\begin{aligned}
 [ABC]^2 &= [ABC][ABC] = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \\ A_z & B_z & C_z \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 & A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z & A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z \\ B_x A_x + B_y A_y + B_z A_z & B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 & B_x C_x + B_y C_y + B_z C_z \\ C_x A_x + C_y A_y + C_z A_z & C_x B_x + C_y B_y + C_z B_z & C_x^2 + C_y^2 + C_z^2 \end{vmatrix},
 \end{aligned}$$

因而有

$$[ABC]^2 = \begin{vmatrix} (A \cdot A) & (A \cdot B) & (A \cdot C) \\ (B \cdot A) & (B \cdot B) & (B \cdot C) \\ (C \cdot A) & (C \cdot B) & (C \cdot C) \end{vmatrix}.$$

由几何意义知道,过一点 O 引有向线段 \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OC} 表示向量 A , B , C 时,这些线段在同一平面上的条件是

$$[ABC] = 0.$$

这也是三个向量 A , B , C 成线性相关的条件。

§ 10 向量三重积

我们将证明对于三个任意的向量 A , B , C , 成立公式

$$(A \times B) \times C = (AC)B - (BC)A. \quad (10.1)$$

这个公式固然可以用和前节类似的几何方法导出,但在这里将利用坐标来证明。

把向量写成

$$A = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}, \quad B = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k},$$

$$C = C_x \mathbf{i} + C_y \mathbf{j} + C_z \mathbf{k},$$

则因

$$A \times B = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k},$$

故有

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} &= [(A_x B_x - A_y B_y) C_z - (A_z B_y - A_y B_z) C_x] \mathbf{i} \\
&\quad + [(A_x B_y - A_y B_x) C_z - (A_z B_x - A_x B_z) C_y] \mathbf{j} \\
&\quad + [(A_y B_z - A_z B_y) C_x - (A_z B_x - A_x B_z) C_y] \mathbf{k} \\
&= (A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}) \\
&\quad - (B_x C_x + B_y C_y + B_z C_z) (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}).
\end{aligned}$$

这就证明了(10.1)。

由(10.1)得出

$$\mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{CB}) \mathbf{A} - (\mathbf{CA}) \mathbf{B},$$

在这里用 \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , 分别代替 \mathbf{C} , \mathbf{A} , \mathbf{B} 则

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{AC}) \mathbf{B} - (\mathbf{AB}) \mathbf{C}.$$

更在(10.1)内以 $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ 替换 \mathbf{C} 时,就有

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \{\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})\} \mathbf{B} - \{\mathbf{B} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})\} \mathbf{A},$$

但因

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = [\mathbf{ABC}], \quad \mathbf{B} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = 0,$$

所以又得出

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = [\mathbf{ABC}] \mathbf{B}.$$

§ 11 向量三重系

现设 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 是三个线性无关的正向量, \mathbf{v} 是任意的向量, 则 \mathbf{v} 定可写做

$$\mathbf{v} = v^1 \mathbf{e}_1 + v^2 \mathbf{e}_2 + v^3 \mathbf{e}_3.$$

这里, v^1, v^2, v^3 并不表示 v 的 1 次, 2 次, 3 次幂, 而是 v 的第一、第二、第三分量。今后我们用注在上角或下角的记号来表示数码。

上式用“ Σ ”号可写成

$$\mathbf{v} = \sum_{\alpha=1}^3 v^\alpha \mathbf{e}_\alpha.$$

今后我們还可省去符号 $\sum_{\kappa=1}^3$, 簡写成

$$\boldsymbol{v} = v^\kappa \boldsymbol{e}_\kappa.$$

这就是說, $\kappa, \lambda, \mu, \dots$ 等希腊字母可取数值 1, 2, 3, 如果同一指标在一項内两回出現的話, 那就把这个指标分別写成 1, 2, 3, 把这些項加在一起表示总和。這項規定有时称为 **Einstein 規約**。

当向量 \boldsymbol{v} 写成上面的形式时, 它的长 v 由

$$(v)^2 = (v^\lambda \boldsymbol{e}_\lambda) (v^\kappa \boldsymbol{e}_\kappa) = (\boldsymbol{e}_\lambda \boldsymbol{e}_\kappa) v^\lambda v^\kappa$$

給出。因此, 如以

$$\boldsymbol{e}_\lambda \cdot \boldsymbol{e}_\kappa = g_{\lambda\kappa} (= g_{\kappa\lambda}),$$

則向量 \boldsymbol{v} 之长 v 可写成

$$(v)^2 = g_{\lambda\kappa} v^\lambda v^\kappa.$$

两个向量

$$\boldsymbol{v} = v^\lambda \boldsymbol{e}_\lambda, \quad \boldsymbol{w} = w^\kappa \boldsymbol{e}_\kappa$$

所成之角 θ 由

$$\cos \theta = \frac{g_{\lambda\kappa} v^\lambda w^\kappa}{\sqrt{g_{\lambda\kappa} v^\lambda v^\kappa} \sqrt{g_{\lambda\kappa} w^\lambda w^\kappa}}$$

給出。这里的 $g_{\lambda\kappa} v^\lambda v^\kappa$ 是 $\sum_{\lambda=1}^3 \sum_{\kappa=1}^3$ 之省略写法, 实际上, 它表示

$$\begin{aligned} g_{\lambda\kappa} v^\lambda v^\kappa &= g_{11} v^1 v^1 + g_{12} v^1 v^2 + g_{13} v^1 v^3 \\ &\quad + g_{21} v^2 v^1 + g_{22} v^2 v^2 + g_{23} v^2 v^3 \\ &\quad + g_{31} v^3 v^1 + g_{32} v^3 v^2 + g_{33} v^3 v^3. \end{aligned}$$

因为这个式是所謂正值二次形式, 所以由 $g_{\lambda\kappa}$ 所作的行列式 g 应当是

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} > 0.$$

但因

$$[e_1 e_2 e_3]^2 = \begin{vmatrix} (e_1 e_1) & (e_1 e_2) & (e_1 e_3) \\ (e_2 e_1) & (e_2 e_2) & (e_2 e_3) \\ (e_3 e_1) & (e_3 e_2) & (e_3 e_3) \end{vmatrix} = g,$$

如更注意到 e_1, e_2, e_3 是正向的, 則

$$[e_1 e_2 e_3] = \sqrt{g}.$$

讓我們考慮對稱矩陣

$$g_{\lambda\kappa} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

的逆矩陣, 它的元素以

$$g^{\lambda\kappa} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix}$$

表示。則由逆矩陣的性質, 有 $g^{\lambda\kappa} = g^{\kappa\lambda}$, 以及

$$g_{\mu\lambda} g^{\lambda\kappa} = \delta_{\mu}^{\kappa}.$$

这里的 δ_{μ}^{κ} 是一个記号, 当 $\kappa = \mu$ 时是 1, 当 $\kappa \neq \mu$ 时是 0, 称为 **Kronecker δ** .

利用这个 $g^{\lambda\kappa}$ 規定

$$e^{\kappa} = g^{\kappa\lambda} e_{\lambda},$$

从而有

$$e_{\lambda} = g_{\lambda\kappa} e^{\kappa},$$

于是由

$$e^{\kappa} e_{\mu} = (g^{\kappa\lambda} e_{\lambda}) e_{\mu} = g^{\kappa\lambda} (e_{\lambda} e_{\mu}) = g^{\kappa\lambda} g_{\lambda\mu},$$

得到

$$e^{\kappa} e_{\mu} = \delta_{\mu}^{\kappa}. \quad (11.1)$$

还有

$$e^{\lambda} e^{\kappa} = (g^{\lambda\rho} e_{\rho}) (g^{\kappa\sigma} e_{\sigma}) = g^{\lambda\rho} g^{\kappa\sigma} (e_{\rho} e_{\sigma}) = g^{\lambda\rho} g^{\kappa\sigma} g_{\rho\sigma} = g^{\lambda\rho} \delta_{\rho}^{\kappa} = g^{\lambda\kappa},$$

亦即

$$e^{\lambda} e^{\mu} = g^{\lambda\mu}.$$

我們称 e_1, e_2, e_3 为向量三重系 (triple), e^1, e^2, e^3 是向量的逆三重系。

从 (11.1), 有 $e^1 e_2 = 0, e^1 e_3 = 0$, 因此, e^1 和 e_2 以及 e_3 都直交, 于是形式

$$e^1 = \alpha (e_2 \times e_3)$$

成立。以 e_1 和上式的两边分别組成內积, 那么, 利用 (11.1), 左边成为 1, 于是有

$$1 = \alpha e_1 \cdot (e_2 \times e_3) = \alpha [e_1 e_2 e_3] = \alpha \sqrt{g},$$

因此, $\alpha = \frac{1}{\sqrt{g}}$, 从这里就得到

$$e^1 = \frac{1}{\sqrt{g}} (e_2 \times e_3).$$

完全同样地可証明

$$e^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} (e_3 \times e_1), \quad e^3 = \frac{1}{\sqrt{g}} (e_1 \times e_2).$$

利用这样的三重系, 任意向量 v 写成 $v = v^1 e_1 + v^2 e_2 + v^3 e_3$ 时, 它的分量 v^1, v^2, v^3 可以容易地求出。作

$$v = v^{\kappa} e_{\kappa} = v^1 e_1 + v^2 e_2 + v^3 e_3$$

和 e^1, e^2, e^3 的內积, 則

$$v \cdot e^1 = v^1, \quad v \cdot e^2 = v^2, \quad v \cdot e^3 = v^3,$$

再如以

$$v e_{\lambda} = v_{\lambda},$$

則

$$v_{\lambda} = v \cdot e_{\lambda} = (v^{\kappa} e_{\kappa}) e_{\lambda} = v^{\kappa} (e_{\kappa} \cdot e_{\lambda}) = v^{\kappa} g_{\kappa\lambda},$$

亦即

$$v_{\lambda} = v^{\kappa} g_{\kappa\lambda}.$$

§ 12 三重系的变换

由一个成正向的三重系 e_1, e_2, e_3 作方程

$$e_{1'} = A_1^1 e_1 + A_1^2 e_2 + A_1^3 e_3,$$

$$e_{2'} = A_2^1 e_1 + A_2^2 e_2 + A_2^3 e_3,$$

$$e_{3'} = A_3^1 e_1 + A_3^2 e_2 + A_3^3 e_3,$$

亦即

$$e_{\lambda'} = A_{\lambda'}^{\lambda} e_{\lambda}, \quad (12.1)$$

从此规定三个新的向量 $e_{\lambda'}$, 这时, $e_{1'}, e_{2'}, e_{3'}$ 仍成为三重系的必要充分条件是

$$\Delta = |A_{\lambda'}^{\lambda}| > 0.$$

这只要从 $[e_{1'} e_{2'} e_{3'}] = \Delta [e_1 e_2 e_3]$ 就立刻知道的。

现设 $A_{\lambda'}^{\lambda}$ 满足这个条件, 矩阵 $(A_{\lambda'}^{\lambda})$ 的逆矩阵写成 $(A_{\lambda}^{\lambda'})$, 则

$$A_{\lambda}^{\lambda'} A_{\lambda'}^{\lambda} = \delta_{\lambda}^{\lambda'}, \quad A_{\lambda}^{\lambda'} A_{\lambda}^{\lambda'} = \delta_{\lambda}^{\lambda'}.$$

因此, 由 $e_{\lambda'} = A_{\lambda'}^{\lambda} e_{\lambda}$ 解出 e_{λ} , 可得出

$$e_{\lambda} = A_{\lambda}^{\lambda'} e_{\lambda'}. \quad (12.2)$$

现设某一个向量 v 关于三重系 e_1, e_2, e_3 表示为

$$v = v^{\alpha} e_{\alpha} = v^1 e_1 + v^2 e_2 + v^3 e_3,$$

关于另一个三重系 $e_{1'}, e_{2'}, e_{3'}$ 表示为

$$v = v^{\alpha'} e_{\alpha'} = v^{1'} e_{1'} + v^{2'} e_{2'} + v^{3'} e_{3'}.$$

这时, 有

$$v^{\alpha'} e_{\alpha'} = v^{\alpha} e_{\alpha},$$

在这式的右边, e_{α} 以 $e_{\alpha} = A_{\alpha}^{\alpha'} e_{\alpha'}$ 代入, 则

$$v^{\alpha'} e_{\alpha'} = v^{\alpha} A_{\alpha}^{\alpha'} e_{\alpha'},$$

再注意到 $e_{\alpha'}$ 是线性无关的这桩事实, 就得到

$$v^{\alpha'} = A_{\alpha}^{\alpha'} v^{\alpha}.$$

这个式子告诉我们, 向量 v 的支量 v^{α} 受到和三重系之变换 (12.1)

相逆的变换。因此，我們称 v^λ 是向量 v 关于三重系 e_1, e_2, e_3 的逆变支量。

其次以

$$v \cdot e_\lambda = v_\lambda, \quad v \cdot e_{\lambda'} = v_{\lambda'},$$

試求 v_λ 和 $v_{\lambda'}$ 之关系。作 $e_{\lambda'} = A_{\lambda'}^\lambda e_\lambda$ 的两边和向量 v 的内积，立刻得到

$$v_{\lambda'} = A_{\lambda'}^\lambda v_\lambda.$$

这个式子告訴我們， v_λ 受到和三重系 e_1, e_2, e_3 之变换 (12.1) 相同的变换。因此，我們称 v_λ 是向量 v 的协变支量。

再試求与三重系 e_1, e_2, e_3 有关，它們所规定的

$$g_{\lambda\mu} = e_\lambda \cdot e_\mu$$

的变换法则。以

$$g_{\lambda'\mu'} = e_{\lambda'} \cdot e_{\mu'},$$

在这式的右边以 $e_{\lambda'} = A_{\lambda'}^\lambda e_\lambda$, $e_{\mu'} = A_{\mu'}^\mu e_\mu$ 代入时，則

$$g_{\lambda'\mu'} = e_{\lambda'} \cdot e_{\mu'} = (A_{\lambda'}^\lambda e_\lambda) (A_{\mu'}^\mu e_\mu) = A_{\lambda'}^\lambda A_{\mu'}^\mu (e_\lambda e_\mu),$$

而有

$$g_{\lambda'\mu'} = A_{\lambda'}^\lambda A_{\mu'}^\mu g_{\lambda\mu}.$$

§ 13 張 量

例如有关于三重系 e_1, e_2, e_3 的量 $T_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\lambda}$ 以及关于三重系 $e_{1'}, e_{2'}, e_{3'}$ 的量 $T_{\mu'\lambda'}^{\cdot\cdot\lambda'}$ ，当两个三重系之間以

$$e_{\lambda'} = A_{\lambda'}^\lambda e_\lambda, \quad e_\lambda = A_\lambda^{\lambda'} e_{\lambda'}$$

結合时， $T_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\lambda}$ 和 $T_{\mu'\lambda'}^{\cdot\cdot\lambda'}$ 以

$$T_{\mu'\lambda'}^{\cdot\cdot\lambda'} = A_{\mu'}^\mu A_{\lambda'}^\lambda A_\lambda^{\lambda'} T_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\lambda}$$

結合起来，这时以 $T_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\lambda}$ 和 $T_{\mu'\lambda'}^{\cdot\cdot\lambda'}$ 所表示的量称为逆变 1 阶、协变 2 阶的張量 (tensor of contravariant valence 1 and covariant valence 2)，称 $T_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\lambda}$, $T_{\mu'\lambda'}^{\cdot\cdot\lambda'}$ 为这个張量关于三重系的支量。逆变 p

阶、协变 q 阶的張量可以同样地規定。

逆变 p 阶、协变 0 阶的張量称为**逆变張量** (contravariant tensor), 逆变 0 阶、协变 q 阶的張量称为**协变張量** (covariant tensor)。逆变 0 阶、协变 0 阶的張量是数量, 逆变 1 阶、协变 0 阶的張量是逆变向量, 逆变 0 阶、协变 1 阶的張量是协变向量。

以上我們遇着的例子有 v^μ 是逆变向量的支量, v_λ 是协变向量的支量, $g_{\lambda\mu}$ 是协变張量的支量。 $g_{\mu\lambda}$ 又特別称为**度量張量**。

以下要說明張量的代数运算。

(1) 同类的張量, 例如說, $R_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}$ 与 $S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}$ 之对应支量相加而成的 $R_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} = T_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}$, 則由于 $R_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}$ 之变换式 $R_{\mu'\lambda'}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} = A_{\mu'}^\mu A_{\lambda'}^\lambda A_{\kappa}^{\kappa'} R_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}$ 和 $S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}$ 之变换式 $S_{\mu'\lambda'}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} = A_{\mu'}^\mu A_{\lambda'}^\lambda A_{\kappa}^{\kappa'} S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}$ 相加而得

$$R_{\mu'\lambda'}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + S_{\mu'\lambda'}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} = A_{\mu'}^\mu A_{\lambda'}^\lambda A_{\kappa}^{\kappa'} (R_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}),$$

亦即 $T_{\mu'\lambda'}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} = A_{\mu'}^\mu A_{\lambda'}^\lambda A_{\kappa}^{\kappa'} T_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}$, 是和前两个同类的張量之支量, 这个張量称为前两个張量之和。

(2) 同类的張量, 例如說, $R_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}$ 与 $S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}$ 的对应支量之差 $R_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} - S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} = T_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}$ 仍是同类張量的支量, 这个張量称为前两个張量之差。

(3) 两个向量, 例如說 $R_{\nu\mu}$ 与 $S_\lambda^{\cdot\cdot}$ 之支量相乘而得的

$$R_{\nu\mu} S_\lambda^{\cdot\cdot} = T_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot},$$

則由于 $R_{\nu\mu}$ 之变换式 $R_{\nu'\mu'} = A_{\nu'}^\nu A_{\mu'}^\mu R_{\nu\mu}$ 和 $S_\lambda^{\cdot\cdot}$ 之变换式

$$S_{\lambda'}^{\cdot\cdot} = A_{\lambda'}^\lambda A_{\kappa}^{\kappa'} S_\lambda^{\cdot\cdot}$$

相乘而得 $R_{\nu'\mu'} S_{\lambda'}^{\cdot\cdot} = A_{\nu'}^\nu A_{\mu'}^\mu A_{\lambda'}^\lambda A_{\kappa}^{\kappa'} R_{\nu\mu} S_\lambda^{\cdot\cdot}$, 亦即

$$T_{\nu'\mu'\lambda'}^{\cdot\cdot\cdot} = A_{\nu'}^\nu A_{\mu'}^\mu A_{\lambda'}^\lambda A_{\kappa}^{\kappa'} T_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot},$$

是一个張量的支量, 这个張量称为前两張量之积。

(4) 一个張量, 例如說 $R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot}$ 給定时, 使它的一个逆变指标等于一个协变指标, 按照規定, 应就这个指标分別取 1, 2, 3 时的量加在一起而成的量 $R_{\sigma\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot}$, 由于在 $R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot}$ 的变换式

$$R_{\nu'\mu'\lambda'}^{\cdot\cdot\cdot} = A_{\nu'}^\nu A_{\mu'}^\mu A_{\lambda'}^\lambda A_{\kappa}^{\kappa'} R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot}$$

里以 $\nu' = \kappa'$, 从而加在一起得到 $R_{\sigma\mu\lambda}^{\nu'\kappa'\sigma'} = A_{\mu'}^{\mu} A_{\lambda'}^{\lambda} R_{\sigma\mu\lambda}^{\nu\sigma'}$ 的原故, 所以它是一个張量的支量, 它比原張量的阶数减少 2, 这项运算称为張量的縮約 (或短縮) (contraction)。

現設有一个量 $R_{\nu\mu\lambda}^{\dots}$, 还未判定它是不是一个張量的支量, 如果有已知的任意向量, 例如說 $S^{\mu\lambda}$, 和它相乘以后再經縮約手續所得的 $R_{\nu\mu\lambda}^{\dots} S^{\mu\lambda}$ 是一个張量的話, 則可断定 $R_{\nu\mu\lambda}^{\dots}$ 是一个張量的支量。为什么呢? 因为 $S^{\mu\lambda}$ 和 $R_{\nu\mu\lambda}^{\dots} S^{\mu\lambda}$ 是張量的支量, 从它們的变换式 $S^{\mu'\lambda'} = A_{\mu}^{\mu'} A_{\lambda}^{\lambda'} S^{\mu\lambda}$, $R_{\nu'\mu'\lambda'}^{\dots} S^{\mu'\lambda'} = A_{\nu'}^{\nu} A_{\mu'}^{\mu} A_{\lambda'}^{\lambda} R_{\nu\mu\lambda}^{\dots} S^{\mu\lambda}$ 即知 $R_{\nu'\mu'\lambda'}^{\dots} A_{\mu}^{\mu'} A_{\lambda}^{\lambda'} S^{\mu\lambda} = A_{\nu'}^{\nu} A_{\lambda}^{\lambda'} R_{\nu\mu\lambda}^{\dots} S^{\mu\lambda}$, 因此, 根据 $S^{\mu\lambda}$ 的任意性就有

$$R_{\nu'\mu'\lambda'}^{\dots} A_{\mu}^{\mu'} A_{\lambda}^{\lambda'} = A_{\nu'}^{\nu} A_{\lambda}^{\lambda'} R_{\nu\mu\lambda}^{\dots},$$

从而得到 $R_{\nu'\mu'\lambda'}^{\dots} = A_{\nu'}^{\nu} A_{\mu}^{\mu'} A_{\lambda}^{\lambda'} A_{\lambda'}^{\lambda} R_{\nu\mu\lambda}^{\dots}$ 的原故。这桩事实叫作張量的商法則 (quotient law of tensor)。

在三維 Euclid 空間里, 如指定了向量的三重系, 則对于这三重系以 $g_{\mu\lambda}$ 为支量的度量張量就定出了。

現在来証明以前規定的 $g^{\lambda\kappa}$ 是一个逆变張量的支量。

向量 \boldsymbol{v} 写成 $\boldsymbol{v} = v^{\kappa} \boldsymbol{e}_{\kappa}$ 的形式时, v^{κ} 是逆变向量的支量。如以 $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_{\lambda} = v_{\lambda}$, 則 v_{λ} 是协变向量的支量。这两者間常有关系

$$g^{\lambda\kappa} v_{\lambda} = v^{\kappa}.$$

因这里的 v_{λ} 是任意的协变向量, v^{κ} 为逆变向量, 根据張量的商法則, 推知 $g^{\lambda\kappa}$ 是逆变張量的支量。

現設有張量 $T_{\mu\lambda}^{\dots}$, 由此利用張量乘法与縮約, 作出

$$T_{\mu\lambda\kappa} = T_{\mu\lambda}^{\dots} g_{\rho\kappa},$$

$T_{\mu\lambda\kappa}$ 仍是一个張量。象这样地利用 $g_{\lambda\kappa}$ 或 $g^{\lambda\mu}$ 由一个張量移于另一个張量, 称它們是相伴的 (associate)。

因为任何相伴的張量常可看做是表示同一几何的或物理的对象, 所以对象本身有时也叫做張量。

例如說, 向量 \boldsymbol{v} 这样一个对象, 如用 v^{κ} 来表示它, 則称为逆变

支量,如用 ψ_λ 表示它,則称为**协变支量**。

如某一張量的支量 $T_{\mu\lambda}^{\dots}$ 关于某一个三重系,满足条件

$$T_{\mu\lambda}^{\dots} = T_{\lambda\mu}^{\dots} \quad (T_{\mu\lambda}^{\dots} = -T_{\lambda\mu}^{\dots})$$

时,則同样的关系式关于任何的三重系也一定成立。这样的張量称做关于 μ 与 λ 是对称的(反称的)。对于所有的指标是对称的(反称的)張量叫做**对称張量**(**反称張量**)。

第2篇 向量分析

第4章 向量的微分

§14 向量的微分

假定一个向量 A 随着一个数量参数, 例如时间 t 的变化而变化, 也就是说假定向量 A 是一个数量参数 t 的函数。对于这样的事实, 我们以记号 $A = A(t)$ 来表示。

现设以一个定点 O 为起点, 引有向线段 \overrightarrow{OP} 表示向量 $A(t)$, 因 $A(t)$ 随着 t 的变化而变化, 所以表示它的有向线段 \overrightarrow{OP} 的终点 P , 其位置也因 t 的变化而变化, 点 P 描绘出一条空间曲线。

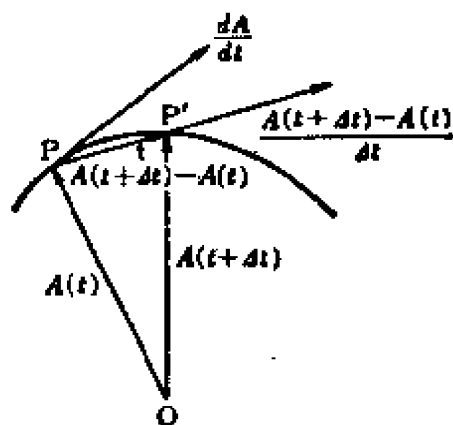


图 14.1

设参数值是 t 时, 表示向量 $A(t)$ 的有向线段是 \overrightarrow{OP} , 参数值是 $t + \Delta t$ 时, 表示向量 $A(t + \Delta t)$ 的有向线段是 $\overrightarrow{OP'}$, 向量 $A(t + \Delta t) - A(t)$ 可用有向线段 $\overrightarrow{PP'}$ 来表示。因此, 后一向量以 Δt 去除 (即以 $\frac{1}{\Delta t}$ 去乘) 所得到的向量

$$\frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t}$$

可用 $\overrightarrow{PP'}$ 之 $\frac{1}{\Delta t}$ 倍的有向线段表示。

设当 Δt 无限地接近于 0 时, 上一向量无限地接近于一个以 P

为起点的某一定有向线段所表示的向量,这个极限位置的向量称为向量 $A(t)$ 关于 t 的导向量,以 $\frac{d}{dt} A$ 或 $\frac{dA}{dt}$ 表示。也就是

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t}.$$

如果 $\frac{dA}{dt}$ 仍是 t 的函数,这种极限手續繼續进行的话,那么,可以定义 $\frac{d}{dt} \left(\frac{dA}{dt} \right) = \frac{d^2 A}{dt^2}$. 同样,也可以定义 $\frac{d}{dt} \left(\frac{d^2 A}{dt^2} \right) = \frac{d^3 A}{dt^3}$, ... 并分别称做是 A 的第1次、第2次、第3次... 导向量。如果 A 是和 t 无关的一个定向量,则很清楚地有 $\frac{dA}{dt} = 0$.

设向量 $A(t)$ 关于一个三重系 e_1, e_2, e_3 以

$$A(t) = A^1(t) e_1 + A^2(t) e_2 + A^3(t) e_3$$

表示时,它的支量 $A^1(t), A^2(t), A^3(t)$ 一般地仍是 t 的函数。因此,

$$\begin{aligned} \frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t} &= \frac{A^1(t + \Delta t) - A^1(t)}{\Delta t} e_1 \\ &+ \frac{A^2(t + \Delta t) - A^2(t)}{\Delta t} e_2 + \frac{A^3(t + \Delta t) - A^3(t)}{\Delta t} e_3, \end{aligned}$$

在 $\Delta t \rightarrow 0$ 时的极限有

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA^1}{dt} e_1 + \frac{dA^2}{dt} e_2 + \frac{dA^3}{dt} e_3,$$

亦即某一向量的导向量之支量等于该向量的支量之导数。

向量关于参数 t 的微分满足以下的公式:

$$\frac{d}{dt} (A + B) = \frac{d}{dt} A + \frac{d}{dt} B,$$

$$\frac{d}{dt} (A - B) = \frac{d}{dt} A - \frac{d}{dt} B,$$

$$\frac{d}{dt} (\alpha A) = \frac{d\alpha}{dt} A + \alpha \frac{d}{dt} A,$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}.$$

这些公式的証明完全和微积分学里的情况相同。

这就是說,有关于向量之和与差,数量与向量之积,向量之內积与外积等等的微分完全和普通微分学里关于函数和、差、积的微分一样,服从同样的法則。但应注意的是向量的外积和向量的順序有关,因此,在写以上公式中的最后一个时要当心不要把順序搞乱,这是很重要的。

§ 15 在空間曲綫論中的应用

設空間內給定一条曲綫,以其上的一个定点 P_0 为出发点,沿着曲綫按一定方向測得的弧长設为 s , 則曲綫上点的位置,可以由 s 来确定。因此,在空間內确定一个定点 O , 如以 $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, 則 \mathbf{r} 应为 s 的函数。这个函数用 $\mathbf{r}(s)$ 表示。如果利用以 O 为起点的三个互相直交的单位向量 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 来表示 $\mathbf{r}(s)$, 則

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k},$$

其中 x, y, z 仍是 s 的函数。

(1) 切綫与法平面 $\mathbf{r}(s)$ 关于 s 的导向量 $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$, 由其定义

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(s + \Delta s) - \mathbf{r}(s)}{\Delta s}$$

就可知道它表示曲綫在点 P 的切綫。但因向量 $\mathbf{r}(s + \Delta s) - \mathbf{r}(s)$ 之长(即弦 PP' 之长)与 Δs (即弧 PP') 之长的比值, 其极限为 1, 所以上面的 $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ 是单位向量。因此, 如命

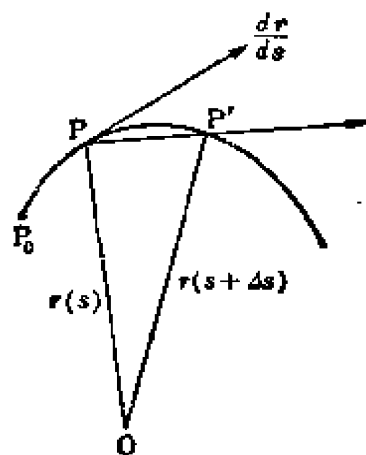


图 15.1

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{t},$$

則 \mathbf{t} 是点 P 处向着曲綫弧增加方向的单位向量。这样就 知道切綫的方程可写成

$$\mathbf{X} = \mathbf{r} + \alpha \mathbf{t}.$$

这里 \mathbf{X} 是由原点 O 到这切綫上任意一点的位置向量, α 是参数, 表示由点 P 到这一点的距离。

設 \mathbf{X} 的支量为 X, Y, Z , 将上式分解为支量表示, 得

$$X = x + \alpha \frac{dx}{ds}, \quad Y = y + \alpha \frac{dy}{ds}, \quad Z = z + \alpha \frac{dz}{ds}.$$

因此, 切綫的方程是

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{ds}} = \frac{Y-y}{\frac{dy}{ds}} = \frac{Z-z}{\frac{dz}{ds}}.$$

容易看出, 在点 P 处垂直于切綫的平面即法平面, 其向量方程是

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} (\mathbf{X} - \mathbf{r}) = 0.$$

以支量来表示则为

$$\frac{dx}{ds} (X - x) + \frac{dy}{ds} (Y - y) + \frac{dz}{ds} (Z - z) = 0.$$

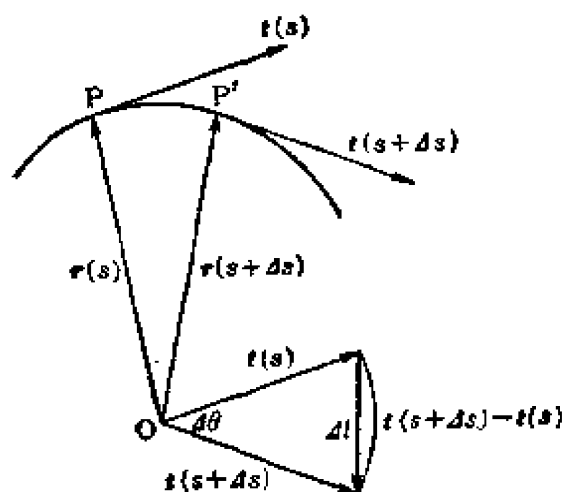


图 15.2

(2) 曲率与主法綫 設曲綫上一点 $\mathbf{r}(s)$ 处的切綫 $\mathbf{t}(s)$ 和另一点 $\mathbf{r}(s+\Delta s)$ 处的切綫 $\mathbf{t}(s+\Delta s)$ 所成之角为 $\Delta\theta$, 則在点 P 处, 曲綫的曲率定义为

$$\kappa = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right|.$$

这就是說, 曲綫上的点向前变动时, 其对应切綫的回轉角与沿曲

綫前进的距离之比的极限, 定义为曲綫在該点的曲率。

过空間内的原点引有向綫段分別表示向量 $\mathbf{t}(s)$ 及 $\mathbf{t}(s+\Delta s)$, 設其所成的角記为 $\Delta\theta$, 向量 $\mathbf{t}(s+\Delta s) - \mathbf{t}(s)$ 之长記为 Δl , 則

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta\theta} = 1.$$

如注意到 $\frac{\mathbf{t}(s+\Delta s) - \mathbf{t}(s)}{\Delta s}$ 的长是 $\frac{\Delta l}{\Delta s} = \frac{\Delta l}{\Delta\theta} \frac{\Delta\theta}{\Delta s}$, 就不难知道, 向量

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{t}(s+\Delta s) - \mathbf{t}(s)}{\Delta s} = \frac{d\mathbf{t}}{ds}$$

的长等于

$$\left(\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta l}{\Delta\theta} \right| \right) \left(\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right| \right) = \kappa.$$

因此

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa \cdot \mathbf{n},$$

\mathbf{n} 是一个单位向量。但因 $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1$ 关于 s 微分后得 $\mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{t}}{ds} = 0$, 故知 \mathbf{t} 与 \mathbf{n} 相互垂直。向量 \mathbf{n} 的方向我們称为曲綫在点 P 的主法綫 (principal normal)。

过曲綫上一点 P , 曲綫在点 P 的切綫与主法綫的平面称为密切平面 (osculating plane)。因此, 密切平面的方程是

$$[\mathbf{X} - \mathbf{r}, \mathbf{t}, \mathbf{n}] = 0,$$

或

$$\left[\mathbf{X} - \mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right] = 0.$$

利用支量来写, 則有

$$\kappa^2 = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2} \right)^2},$$

而密切平面的方程則是

$$\begin{vmatrix} X-x & \frac{dx}{ds} & \frac{d^2x}{ds^2} \\ Y-y & \frac{dy}{ds} & \frac{d^2y}{ds^2} \\ Z-z & \frac{dz}{ds} & \frac{d^2z}{ds^2} \end{vmatrix} = 0.$$

(3) 挠率与副法线 在曲线上一點 P 的切线向量设为 t , 主法线向量设为 n , 则

$$t \times n = b$$

是垂直于密切平面的向量, 它的方向称为曲线在一点 P 的副法线 (binormal)。

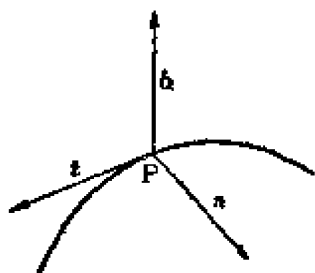


图 15.3

设曲线上一點 $r(s)$ 处的密切平面和另一點 $r(s+\Delta s)$ 处的密切平面所成的角为 $\Delta\varphi$, 亦即 $b(s)$ 与 $b(s+\Delta s)$ 所成的角为 $\Delta\varphi$, 我们把这条曲线在一點的挠率 (torsion) 定义为

$$\tau = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}.$$

这就是说, 当点在曲线上变动时, 其对应密切平面的回轉角与点在曲线上前进的距离之比的极限定义为曲线在一點的挠率。

和以前一样, 可以証明向量 $\frac{db}{ds}$ 之长等于 $|\tau|$. 但因

$$\frac{db}{ds} = \frac{d}{ds}(t \times n) = \frac{dt}{ds} \times n + t \times \frac{dn}{ds} = t \times \frac{dn}{ds},$$

所以 $\frac{db}{ds}$ 垂直于 t . 更由于 $b \cdot b = 1$ 經微分后得 $b \cdot \frac{db}{ds} = 0$, 所以

$\frac{db}{ds}$ 也垂直于 b , 因此, $\frac{db}{ds}$ 是指向 n 的方向的. 在这里我們确定 τ 之符号使

$$\frac{db}{ds} = -\tau n$$

得以成立。

(4) Frenet-Serret 公式 我們已經对空間曲綫上一点 P 的三个向量, 即切綫 t , 主法綫 n , 副法綫 b 給予定义。这时, 主法綫和副法綫所决定的平面称做是法平面, 切綫和主法綫所决定的平面称做是密切平面。切綫和副法綫所决定的平面称为从切平面 (rectifying plane)。且

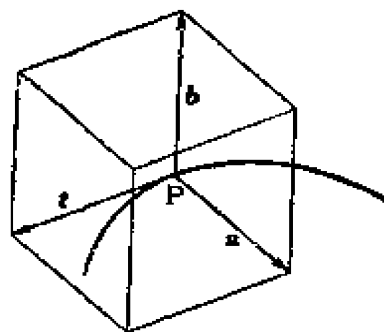


图 15.4

$$\frac{dt}{ds} = \kappa n, \quad \frac{db}{ds} = -\tau n.$$

今就 $n = b \times t$ 沿曲綫微分时, 則得

$$\frac{dn}{ds} = \frac{db}{ds} \times t + b \times \frac{dt}{ds} = -\tau(n \times t) + \kappa(b \times n) = \tau b - \kappa t.$$

因此, 我們得出公式

$$\begin{cases} \frac{dt}{ds} = \kappa n \\ \frac{dn}{ds} = -\kappa t + \tau b \\ \frac{db}{ds} = -\tau n, \end{cases}$$

这些公式是空間曲綫論里最重要的 Frenet-Serret 公式。

§ 16 在运动学中的应用

一質点 P 在空間內运动时, 在空間內取定一点 O , 以 $r = \overrightarrow{OP}$, 則 r 是時間 t 的函数, 用 $r = r(t)$ 来表示。

用以 O 为原点的三个互相直交的单位向量 i, j, k 来表示 r , 則有

$$r = xi + yj + zk,$$

x, y, z 仍是 t 之函数。

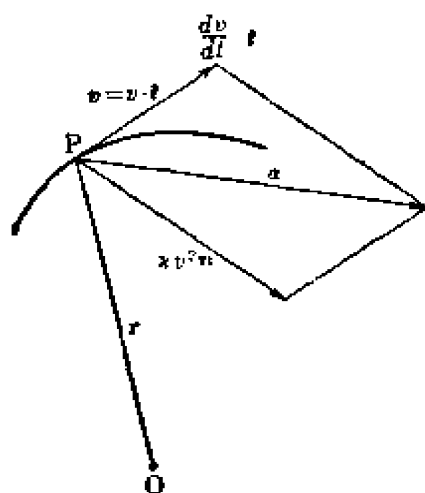


图 10.1

(1) 速度与加速度 如令 $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$,
 则 \mathbf{v} 是表示这个质点速度的向量。因为

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \mathbf{t},$$

如速度的数量以 v 表示, 则

$$\mathbf{v} = v \cdot \mathbf{t}.$$

其次, 设以

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{a},$$

则 \mathbf{a} 是表示这个质点的加速度向量。因此, 有

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \mathbf{t} + v \frac{d\mathbf{t}}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \mathbf{t} + v \frac{d\mathbf{t}}{ds} \frac{ds}{dt},$$

这样就得到

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{t} + \kappa v^2 \mathbf{n}.$$

这说明, 质点的加速度向量沿轨道的切线方向与主法线方向分解时, 其分量分别是 $\frac{dv}{dt}$ 与 κv^2 .

(2) 速端曲线 设某一质点的运动以 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 表示, 在空间里确定一个定点 O' , 引有向线段

$$\overrightarrow{O'P'} = \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

则点 P' 的轨迹称为这个运动的速端曲线(hodograph)。

对于在直线上作等速运动的质点, 因 $v = \text{常数}$, 故知其速端曲线是一个定点 P' 。

对于在直线上作等加速度运动的质点, 因 $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 = \text{常数}$,

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}_0 t + \mathbf{v}_0,$$

而且由于 \mathbf{a}_0 和 \mathbf{v}_0 有同一方向, 故知其速端曲线是和质点的轨道平行的一条曲线。

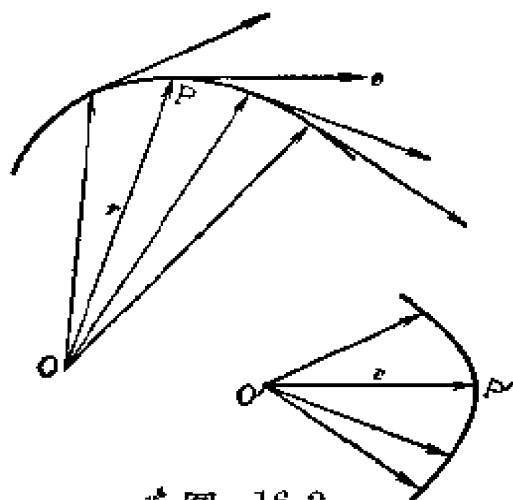


图 16.2

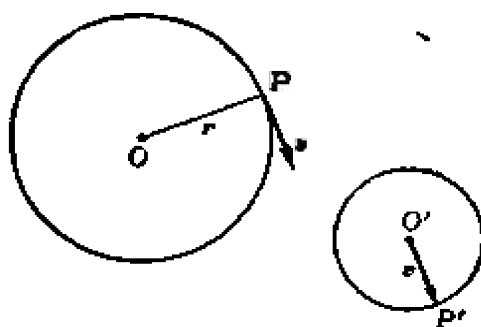


图 16.3

在圆周上作等速运动的质点,其速度向量在同一平面上且 $|v| = \text{常数}$,故其速端曲线仍是一个圆。这时,在上面的结果

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt} \mathbf{t} + \kappa v^2 \mathbf{n}$$

里,因有 $v = \text{常数}$, $\kappa = \frac{1}{r}$, 所以

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v^2}{r} \mathbf{n},$$

亦即 P' 的速度的大小是 $\frac{v^2}{r}$, 这里的 r 为原来的圆半径。

(3) 根据牛顿力学定律的质点运动 质点 P 相对于一个定点 O 受到和 OP 的平方成反比的力作用,我们现在就要研究这种运动。以 $\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}$, 则上述定律可写成

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{k}{|\mathbf{r}|^3} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

或

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{k}{r^3} \mathbf{r}.$$

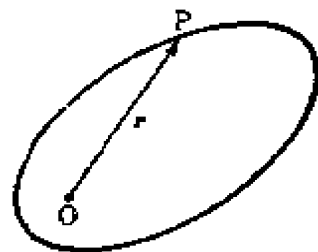


图 16.4

这里的 k 是比例常数,如果 k 是正值,则力为斥力,如 k 是负值,则为引力。

试由向量 \mathbf{r} 和上式的两边组成外积,则

$$\mathbf{r} \times \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = 0,$$

因此,得到

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{a}_0 = \text{常数}. \quad (16.1)$$

这个式子只要运动方程是如下形式

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = f(r) \mathbf{r}$$

时一定成立,这表示运动在垂直于 \mathbf{a}_0 的平面内进行,动径 \overrightarrow{OP} 在单位时间内描画出的面积等于定值。

如考虑 \mathbf{r} 和 (16.1) 之两边所成的外积

$$\mathbf{r} \times \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \mathbf{r} \times \mathbf{a}_0,$$

则

$$\left(\mathbf{r} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \mathbf{r} - (\mathbf{r} \mathbf{r}) \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{a}_0,$$

于是由于左边可写成

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{d\mathbf{r}^2}{dt} \right) \mathbf{r} - r^2 \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \frac{1}{2} \left(\frac{dr^2}{dt} \right) \mathbf{r} - r^2 \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ &= r \left(\frac{dr}{dt} \mathbf{r} - r \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right), \end{aligned}$$

就得到

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \frac{\mathbf{r}}{r^3} \times \mathbf{a}_0.$$

以外积形式在运动方程的两边乘以 \mathbf{a}_0 , 有

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \times \mathbf{a}_0 = k \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \times \mathbf{a}_0 \right),$$

用前式代进这个式子里,即得

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \times \mathbf{a}_0 = -k \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right),$$

两边积分后,得到

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{a}_0 = \mathbf{b}_0 - \frac{k}{r} \mathbf{r}.$$

这里的 \mathbf{b}_0 是垂直于 \mathbf{a}_0 的一个定向量。

按外积形式以定向量 \mathbf{a}_0 乘上式两边, 所得的外积是

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_0 \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{a}_0 \right) &= \mathbf{a}_0 \times \left(\mathbf{b}_0 - \frac{k}{r} \mathbf{r} \right), \\ (\mathbf{a}_0 \mathbf{a}_0) \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \left(\mathbf{a}_0 \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \mathbf{a}_0 &= \mathbf{a}_0 \times \left(\mathbf{b}_0 - \frac{k}{r} \mathbf{r} \right), \end{aligned}$$

但因 \mathbf{a}_0 和 $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ 是直交的, 所以得到

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\mathbf{a}_0}{a_0^2} \times \left(\mathbf{b}_0 - \frac{k}{r} \mathbf{r} \right).$$

以向量 \mathbf{r} 和这个式子的两边组成外积

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{r} \times \left\{ \frac{\mathbf{a}_0}{a_0^2} \times \left(\mathbf{b}_0 - \frac{k}{r} \mathbf{r} \right) \right\}, \\ \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \left(\mathbf{r}, \mathbf{b}_0 - \frac{k}{r} \mathbf{r} \right) \frac{\mathbf{a}_0}{a_0^2} - \frac{(\mathbf{r} \mathbf{a}_0)}{a_0^2} \left(\mathbf{b}_0 - \frac{k}{r} \mathbf{r} \right), \end{aligned}$$

于是

$$\mathbf{a}_0 = \frac{(\mathbf{r} \mathbf{b}_0)}{a_0^2} \mathbf{a}_0 - \frac{kr}{a_0^2} \mathbf{a}_0,$$

这样就得到

$$a_0^2 = (\mathbf{r} \mathbf{b}_0) - kr.$$

因此, 如向量 \mathbf{b}_0 和 \mathbf{r} 所成的角为 θ , 则

$$a_0^2 = r b_0 \cos \theta - kr,$$

亦即

$$r = \frac{-\frac{a_0^2}{k}}{1 - \frac{b_0}{k} \cos \theta}.$$

上式表示质点 P 画出一条以点 Q 为焦点的圆锥曲线。

第5章 微分运算符

§ 17 数量的梯度

在設定直交軸的空間內，設原点为 O ，对于每一点 $P(x, y, z)$ ，有确定的一个数量

$$\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

这样，作为点的函数的数量分布在空間內，我們称这些个数量組成数量場 (scalar field)。

今設 $f(x, y, z)$ 是一个数量場，使它等于定值的点的軌迹

$$f(x, y, z) = c$$

称为等位面 (equipotential surface)。等温面、等压面、等电位面就是它的一些例子。

当給出一个数量場 $f(x, y, z)$ 时，以它关于 x, y, z 的偏导数

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$$

作为支量的向量称为数量 $f(x, y, z)$ 的梯度向量 (gradient vector)，以 $\text{grad } f$ 或 ∇f 来表示。如用向量 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 来写的話，則有

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}.$$

又因为它可写成

$$\nabla f = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) f,$$

这等于說 ∇f 是以

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

这样一个向量运算符施于 f 而得到的，或者把 ∇f 看成是这个向

量运算符与数量 f 之积。这样的向量运算符叫作 **Hamilton 运算符** (Hamiltonian)。

有时也用

$$\nabla_x f, \nabla_y f, \nabla_z f \text{ 或 } \text{grad}_x f, \text{grad}_y f, \text{grad}_z f$$

等记号来表示 ∇f 在 x, y, z 轴上的分量。

容易验证出 ∇ 具有如次的性质：

$$\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g,$$

$$\nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g),$$

$$\nabla(f(u)) = \frac{df}{du} \nabla u,$$

在最后一式里, f 是数量场 $u(x, y, z)$ 的函数。从 ∇ 的定义更清楚地知道

$$\nabla x = \mathbf{i}, \quad \nabla y = \mathbf{j}, \quad \nabla z = \mathbf{k}.$$

又因数量场的全微分可写成

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz,$$

所以 df 可以向量 ∇f 和向量 $d\mathbf{r}$ 的内积形式表示出, 即

$$df = (\nabla f) \cdot d\mathbf{r}.$$

对于最初一个例的数量场

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

计算 ∇r 时, 因

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

就得到

$$\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

因此, 对于一般 r 的函数 $f(r)$ 有

$$\nabla f(r) = \frac{df}{dr} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

特别地, 如 $f(r) = \frac{1}{r}$, 则

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (17.1)$$

一般地说来, 如对于空间各点分别确定对应的向量, 这样一组向量就叫作**向量场**(vector field)。对于一个向量场 \mathbf{A} , 其分量 A_x, A_y, A_z 一般是 x, y, z 的函数。如果对于一个向量场 \mathbf{A} , 有使

$$\mathbf{A} = -\nabla f$$

成立的**数量场** f 存在, 则称 \mathbf{A} 具有**位**(potential), 而称 f 为 \mathbf{A} 的**位**, 或**数量位**(scalar potential)。

例如, 设在一点 C 有电荷 e , 它对带单位正电荷的点 P 作用的力 \mathbf{E} 可由

$$\mathbf{E} = -\frac{e}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{e}{r^3} \mathbf{r}$$

给出。由 (17.1), 有

$$\mathbf{E} = -\nabla\left(\frac{e}{r}\right).$$

因此, 如令 $\varphi = \frac{e}{r}$, 则得到

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi.$$

在这里 φ 是**电位**, \mathbf{E} 表示**电场强度**, \mathbf{E} 具有位 φ 。

现设一个数量场 $f(x, y, z)$ 和通过一点 P 的单位向量 \mathbf{s} 为已给。在向量 \mathbf{s} 上取一点 P' , 使 $PP' = \Delta s$ 。这时, 在 P 处的 f 值为 f , 在 P' 处的 f 值为 $f + \Delta f$, 则

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta s} = \frac{\partial f}{\partial s}$$

称为在单位向量 \mathbf{s} 方向上的数量 f 的**方向导数**(direction derivative)。设 \mathbf{s} 的分量是 s_x, s_y, s_z , 则由于

$$\frac{\Delta f}{\Delta s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\Delta z}{\Delta s},$$

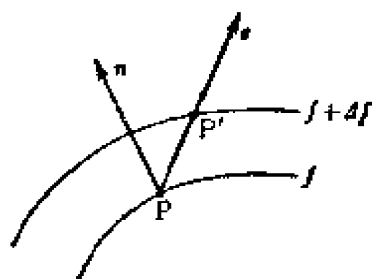


图 17.1

$$\frac{\Delta x}{\Delta s} \rightarrow s_x, \quad \frac{\Delta y}{\Delta s} \rightarrow s_y, \quad \frac{\Delta z}{\Delta s} \rightarrow s_z,$$

即得到

$$\frac{\partial f}{\partial s} = s_x \frac{\partial f}{\partial x} + s_y \frac{\partial f}{\partial y} + s_z \frac{\partial f}{\partial z}.$$

更因为这个式子可写成

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \left(s_x \frac{\partial}{\partial x} + s_y \frac{\partial}{\partial y} + s_z \frac{\partial}{\partial z} \right) f,$$

若把右边看做是向量 \mathbf{s} 和向量运算符 ∇ 所成的内积

$$\mathbf{s} \cdot \nabla = s_x \frac{\partial}{\partial x} + s_y \frac{\partial}{\partial y} + s_z \frac{\partial}{\partial z}$$

施加于 f 而得的结果时, 则可写成

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \mathbf{s} \cdot \nabla f = (\mathbf{s} \cdot \nabla) f.$$

这里的 $\mathbf{s} \cdot \nabla$ 是一个数量运算符。

一般讲来, 即使向量 \mathbf{v} 不是单位向量, 仍可规定

$$\mathbf{v} \cdot \nabla = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z},$$

而有

$$\mathbf{v} \cdot \nabla f = v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z}.$$

在前一例里, 通过一点 P 的等位面 $f(x, y, z) = \text{常数}$, 在该点的等位面之单位法线设为 \mathbf{n} 时, 则

$$\mathbf{n}(\nabla f) = \frac{\partial f}{\partial n}.$$

\mathbf{n} 和 ∇f 有同一方向, 而且 \mathbf{n} 是单位向量, 所以 ∇f 之长为 $\frac{\partial f}{\partial n}$, 方向为 \mathbf{n} , 因此有

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial n} \mathbf{n}.$$

§ 18 向量的散度

对空间各点分别规定向量 \mathbf{A} 时, 这样一组向量, 已如前述, 称

为向量场, 以 $A(x, y, z)$ 表示。

向量场 $A(x, y, z)$ 的支量 A_x, A_y, A_z 仍是 x, y, z 的函数。以式

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

表示的数量称为向量 A 的散度 (divergence), 以 $\text{div } A$ 来表示。上式又可写成

$$\begin{aligned} \nabla \cdot A &= \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) (A_x i + A_y j + A_z k) \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \end{aligned}$$

关于向量场 $A(x, y, z)$ 的散度的意义说明如下。凡切线方向总是朝着向量 A 的方向的曲线, 亦即满足关系式

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}$$

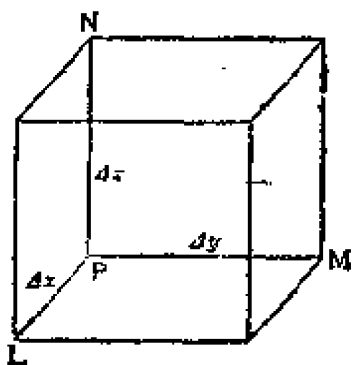


图 18.1

的曲线称为向量场 $A(x, y, z)$ 的流线 (stream line)。流线表示出向量 A 的方向。为了要表示出向量的大小 (或强度), 引流线通过垂直于 A 的单位平面, 令其数目等于向量 A 的长, 即以通过这一单位面积上的流线数 (通量) 来表示向量的强度。因此, 通过任意单位平面的流线数目等于 A 在这个平面的单位法线上的垂直射影之长。

过空间一点 P 引平行于 x 轴、 y 轴、 z 轴的直线, 从 P 起在这些直线上分别截取 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 等长度, 其终点设为 L, M, N 。现在要计算出入于以 PL, PM, PN 为三条棱的正六面体的流线数目。

首先, 流进矩形 PMN 的流线数等于 A 在 PL 上的垂直射影之长 (即 A_z) 和 PMN 之面积 $\Delta y \Delta z$ 的相乘积, 即 $A_z \Delta y \Delta z$,

其次, 对于与 PMN 相对之平面, 流出的流綫数等于在 $A_x \Delta y \Delta z$ 内以 $A_x + \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x$ 代换 A_x 而得的

$$\left(A_x + \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z.$$

因此, 从面 PMN 流进, 再从其对面流出的流綫数是

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z,$$

完全同样, 从面 PNL 流进, 从其对面流出的流綫数是

$$\frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z,$$

从面 PLM 流进, 从其对面流出的流綫数是

$$\frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z.$$

綜合以上結果, 从正六面体各面流出的流綫数目等于

$$\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z = (\operatorname{div} \mathbf{A}) \Delta x \Delta y \Delta z.$$

因此, 由单位体积中流出的流綫数就是以正六面体的体积 $\Delta x \Delta y \Delta z$ 去除上式所得的商, 即 $\operatorname{div} \mathbf{A}$. 如果 $\operatorname{div} \mathbf{A}$ 是負值, 則它所表示的就是流进单位体积的流綫数。

例如, 設一点 O 載有电荷 e , 在 O 的电場中, 点 P 处的电場强度 E 为 $E = \frac{e}{r^3} \mathbf{r}$, 对于它有

$$E_x = e \frac{x}{r^3}, \quad E_y = e \frac{y}{r^3}, \quad E_z = e \frac{z}{r^3}.$$

因为

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

所以由

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial x} &= e \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} \right), \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} = e \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5} \right), \\ \frac{\partial E_z}{\partial z} &= e \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5} \right) \end{aligned}$$

得出

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = e \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} \right) = 0.$$

由一个数量场 f 作它的梯度 ∇f , 更作这个梯度 ∇f 的散度 $\nabla(\nabla f) = \nabla^2 f$, 則得到由

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

所給定的数量。这里出現的运算符我們称之为 **Laplace 运算符**。因而偏微分方程

$$\nabla^2 f = 0$$

叫做 Laplace 方程, 滿足它的函数叫做 **調和函数** (harmonic function)。

例如, 对于 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 因为有

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5},$$

所以

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = 0.$$

前举的向量 \mathbf{E} , 因具有位

$$\mathbf{E} = -\nabla \left(\frac{e}{r} \right),$$

故知

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -\nabla \nabla \left(\frac{e}{r} \right) = -e \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = 0.$$

如設 f 是一个数量, \mathbf{A} 是一个向量, 要計算 $\operatorname{div}(f\mathbf{A})$ 的話, 則

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(f\mathbf{A}) &= \frac{\partial f A_x}{\partial x} + \frac{\partial f A_y}{\partial y} + \frac{\partial f A_z}{\partial z} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} A_x + \frac{\partial f}{\partial y} A_y + \frac{\partial f}{\partial z} A_z \right) + f \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right), \end{aligned}$$

从而得出

$$\operatorname{div}(f\mathbf{A}) = (\operatorname{grad} f) \cdot \mathbf{A} + f \operatorname{div} \mathbf{A}.$$

§ 19 向量的旋度

对于向量场 $\mathbf{A}(x, y, z)$, 以

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

作为支量的向量称为 \mathbf{A} 的旋度 (rotation), 以记号 $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ (或 $\operatorname{curl} \mathbf{A}$) 来表示。亦即, 如

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k},$$

则

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

这个式子又可写成

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}.$$

$\operatorname{rot} \mathbf{A}$ 之 x, y, z 支量有时也写为 $\operatorname{rot}_x \mathbf{A}, \operatorname{rot}_y \mathbf{A}, \operatorname{rot}_z \mathbf{A}$.

如用 Hamilton 运算子 $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$ 和向量 $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$ 作成外积的形式

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \\ &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}, \end{aligned}$$

则有

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

对于两向量 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} , 旋度满足

$$\operatorname{rot}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \operatorname{rot} \mathbf{A} + \operatorname{rot} \mathbf{B},$$

这从定义就可直接看出。对于一个数量 f 和一个向量 \mathbf{A} , 试计算 $\text{rot}(f\mathbf{A})$ 的 x 分量, 则有

$$\begin{aligned}\text{rot}_x f\mathbf{A} &= \frac{\partial}{\partial y}(fA_z) - \frac{\partial}{\partial z}(fA_y) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial y}A_z - \frac{\partial f}{\partial z}A_y\right) + f\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \\ &= (\nabla f \times \mathbf{A})_x + f\text{rot}_x \mathbf{A}.\end{aligned}$$

同样, 有

$$\begin{aligned}\text{rot}_y f\mathbf{A} &= (\nabla f \times \mathbf{A})_y + f\text{rot}_y \mathbf{A}, \\ \text{rot}_z f\mathbf{A} &= (\nabla f \times \mathbf{A})_z + f\text{rot}_z \mathbf{A}.\end{aligned}$$

因此, 最后得到

$$\text{rot}(f\mathbf{A}) = \nabla f \times \mathbf{A} + f\text{rot} \mathbf{A}.$$

§ 20 关于梯度、散度、旋度的一些公式

本节证明几个关于向量的梯度、散度以及旋度的重要公式。

$$(1) \text{grad}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = (\mathbf{A}\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times \text{rot} \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \text{rot} \mathbf{A}.$$

为了证明这一式, 让我们把它右边的 x 分量写下来,

$$\begin{aligned}& \left(A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z}\right)B_x \\ & + \left(B_x \frac{\partial}{\partial x} + B_y \frac{\partial}{\partial y} + B_z \frac{\partial}{\partial z}\right)A_x \\ & + \left[A_y \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right) - A_z \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z}\right)\right] \\ & + \left[B_y \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - B_z \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\right] \\ & = \frac{\partial}{\partial x}(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z),\end{aligned}$$

从此可以看出它和左边的 x 分量一致。同样可以证明两边的 y 分量、 z 分量也是一致的。

$$(2) \operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{B}.$$

計算左边,有

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \frac{\partial}{\partial x}(A_y B_z - A_z B_y) + \frac{\partial}{\partial y}(A_z B_x - A_x B_z) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z}(A_x B_y - A_y B_x) \\ &= B_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + B_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \\ &\quad + B_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - A_x \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \\ &\quad - A_y \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) - A_z \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \\ &= \mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{B}. \end{aligned}$$

$$(3) \operatorname{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{A}.$$

計算右边的 x 支量,有

$$\begin{aligned} &\left(B_x \frac{\partial}{\partial x} + B_y \frac{\partial}{\partial y} + B_z \frac{\partial}{\partial z} \right) A_x - \left(A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z} \right) B_x \\ &\quad + A_x \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) - B_x \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}(A_z B_y - A_y B_z) - \frac{\partial}{\partial z}(A_z B_x - A_x B_z), \end{aligned}$$

它和左边的 x 支量一致。同样,两边的 y 支量、 z 支量也可証明是一致的。

$$(4) \operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \mathbf{0}.$$

計算 x 支量,有

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0.$$

同样, y 支量与 z 支量也是 0.

$$(5) \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0.$$

因为

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = 0.\end{aligned}$$

$$(6) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}.$$

試計算 x 分量, 則有

$$\begin{aligned}& \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \\ &\quad - \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right),\end{aligned}$$

从这里看出两边的 x 分量是一致的。同样可証两边的 y 分量、 z 分量也是一致的。

第6章 向量的积分

§ 21 綫 积 分

在空間里，設已給定了一个数量場 $f(P) = f(x, y, z)$ 及連接兩点 A, B 的曲綫 C :

$$\begin{aligned} x &= x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s) \\ (s_0 \leq s \leq s_1). \end{aligned}$$

曲綫 AB 用点 A_1, A_2, \dots, A_{n-1} 进行分割, 設弧 $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}B$ 的长各为 $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$, 在弧 $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}B$ 上各取任意点 P_1, P_2, \dots, P_n , 作

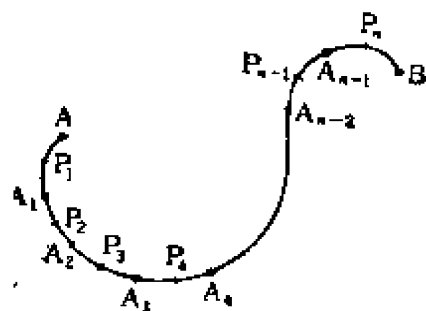


图 21.1

$$\sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta s_i,$$

当 $\Delta s_i \rightarrow 0$ 时, 上式的极限就是我們所熟知的

$$\int_{s_0}^{s_1} f(x, y, z) ds.$$

这个积分称为 $f(x, y, z)$ 沿曲綫 C 的綫积分。有时把它写成

$$\int_C f(x, y, z) ds.$$

当曲綫 C 是閉曲綫时, 又常把它写成

$$\oint_C f(x, y, z) ds.$$

在上述情况下, 向量 $A_{i-1}A_i$ 的 x, y, z 支量分別記为 $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$, 作

$$\sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta x_i, \quad \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta y_i, \quad \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta z_i,$$

取它們的极限,写做

$$\int_{AB} f(x, y, z) dx, \quad \int_{AB} f(x, y, z) dy, \quad \int_{AB} f(x, y, z) dz.$$

这些积分的每一个都叫做綫积分。設这条曲綫的切綫 $\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right)$ 之方向余弦为 $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, 則因

$$dx = \cos \alpha ds, \quad dy = \cos \beta ds, \quad dz = \cos \gamma ds,$$

以上几个积分又可写成

$$\int_{AB} f(x, y, z) \cos \alpha ds, \quad \int_{AB} f(x, y, z) \cos \beta ds, \\ \int_{AB} f(x, y, z) \cos \gamma ds,$$

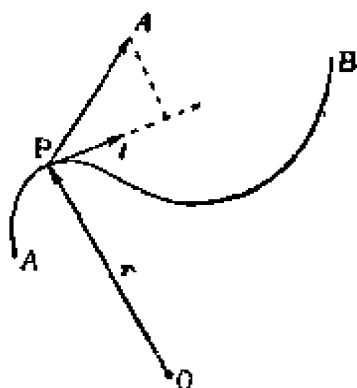


图 21.2

这些形式就是最初說明的綫积分。

設沿着曲綫 AB 給定了一个向量場 A , 則 A 和曲綫的切綫向量 t 組成的內积 $A \cdot t$ 确定出沿着曲綫的数量。因此, 可以考虑它沿着 AB 的綫积分

$$\int_{AB} A \cdot t ds.$$

这个积分称为 A 沿着曲綫 AB 的切綫綫积分。以 r 表示从原点引向曲綫上一点 P 的向量, 因

$$t \cdot ds = \frac{dr}{ds} ds = dr,$$

所以, 上面的綫积分可写成

$$\int_{AB} A \cdot t ds = \int_{AB} A \cdot dr = \int_{AB} (A_x dx + A_y dy + A_z dz).$$

在上面这个式子內, 如 A 表示力場, 則上式表示了以力 A 使質点从 A 沿着曲綫移动到 B 所作的功。

如果 A 表示流体的速度, 則上面的积分表示所謂环流量。

在上式內,如以 $A = \nabla f$, 則

$$\begin{aligned}\int_{AB} (\nabla f) d\mathbf{r} &= \int_{AB} \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right) \\ &= \int_{AB} df = f(B) - f(A).\end{aligned}$$

例如,設电場为 E , 电位为 f , 則

$$\int_{AB} E d\mathbf{r} = - \int_{AB} (\nabla f) d\mathbf{r} = f(A) - f(B).$$

若曲綫是封閉的,則有

$$\oint (\nabla f) d\mathbf{r} = 0.$$

如果由点 A 到点 B 有两条曲綫 C_1 与 C_2 , 則沿着 C_1 前进,然后沿着 C_2 回到原处,这样就形成一条閉曲綫,因而可利用上式得出

$$\begin{aligned}\int_{C_1} (\nabla f) d\mathbf{r} - \int_{C_2} (\nabla f) d\mathbf{r} &= 0, \\ \int_{C_1} (\nabla f) d\mathbf{r} &= \int_{C_2} (\nabla f) d\mathbf{r}.\end{aligned}$$

这說明由 A 至 B 的积分 $\int (\nabla f) d\mathbf{r}$ 与路綫的选择无关。

§ 22 面积分

在空間里設有一个数量場 $f(P) = f(x, y, z)$ 及一个曲面 S . 用曲綫网把 S 細分,每个小区域的面积記为 ΔS_i , 在每个小区域里各取任意的点 P_i , 作 $f(P_i) \Delta S_i$, 再由这些个别的項組成总和

$$\sum_i f(P_i) \Delta S_i,$$

則它的极限

$$\iint_S f(x, y, z) dS$$

称为 f 关于这个曲面的面积分。

在上述情况下, 设 ΔS_i 在 yz , zx , xy 等坐标面上的垂直射影为 $\Delta y_i \Delta z_i$, $\Delta z_i \Delta x_i$, $\Delta x_i \Delta y_i$, 把

$$\sum_i f(P_i) \Delta y_i \Delta z_i, \quad \sum_i f(P_i) \Delta z_i \Delta x_i, \quad \sum_i f(P_i) \Delta x_i \Delta y_i$$

的极限写成

$$\iint_S f(x, y, z) dy dz, \quad \iint_S f(x, y, z) dz dx, \\ \iint_S f(x, y, z) dx dy,$$

这些积分仍称为面积分。设 ΔS 的法綫 (随 S 的表里面来确定法綫的方向) 之方向余弦分别为 $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$, 则因

$$dy dz = \cos \alpha dS, \quad dz dx = \cos \beta dS, \quad dx dy = \cos \gamma dS,$$

上式可写成

$$\iint_S f(x, y, z) \cos \alpha dS, \quad \iint_S f(x, y, z) \cos \beta dS, \\ \iint_S f(x, y, z) \cos \gamma dS,$$

这些形式就是最初说明的面积分。

设对曲面上每个点, 给定一个向量 A , 这个曲面的单位法綫記以 n , 则 A 与 n 所成之内积 $A \cdot n$ 是

定义于曲面上的数量場。因此, 可以考虑到它在 S 上的面积分

$$\iint_S A \cdot n dS.$$

今设 n 的方向余弦是 $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$, 則有

$$\iint_S A \cdot n dS = \iint_S (A_x \cos \alpha + A_y \cos \beta + A_z \cos \gamma) dS \\ = \iint_S (A_x dy dz + A_y dz dx + A_z dx dy).$$

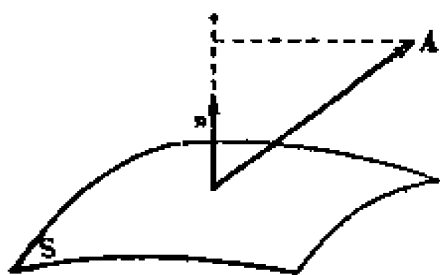


图 22.1

上式内的 A 如果是流体速度, 则上述积分表示在单位时间内通过 S 的流量。

§ 23 关于散度的定理

假设一个函数 $f(x, y, z)$ 和一个闭曲面 S 为已给, S 所包围的立体部分记为 V , 则

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial z} dx dy dz = \iint_S f dx dy. \quad (23.1)$$

现在来证明这项结论。

为了简单起见, 设平行于 z 轴的直线与 S 的交点不超过两点。如果不是这样的话, 则把 S 划分为若干个满足上述条件的部分即可。

设 S 在 xy 平面上的垂直射影为 Δ , 过 Δ 内一点 $(x, y, 0)$ 引平行于 z 轴的直线自下而上地交 S 于两点

$P_1(x, y, z_1)$ 与 $P_2(x, y, z_2)$, 把含 P_1 的部分记为 S_1 , 含 P_2 的那部分记为 S_2 , 则

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial f}{\partial z} dx dy dz &= \iint_{\Delta} [f(x, y, z)]_{z_1}^{z_2} dx dy \\ &= \iint_{\Delta} [f(x, y, z_2) - f(x, y, z_1)] dx dy. \end{aligned}$$

但因在 S_2 上, $dx dy$ 的符号不变, 可是在 S_1 上, $dx dy$ 的符号就要改变, 所以

$$\begin{aligned} \text{上式} &= \iint_{S_2} f(x, y, z) dx dy + \iint_{S_1} f(x, y, z) dx dy \\ &= \iint_S f(x, y, z) dx dy. \end{aligned}$$

现设有一个向量场 A , 在前一式内以 $f = A_z$ 代进, 则有

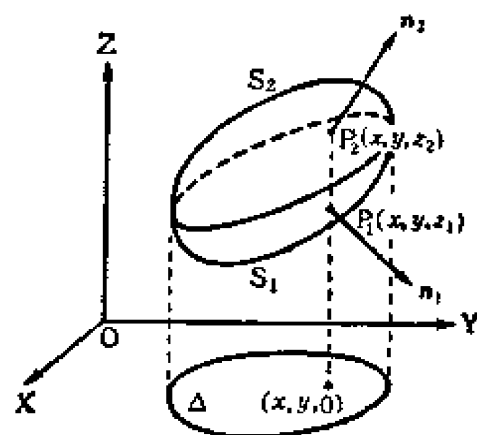


图 23.1

$$\iiint_V \frac{\partial A_z}{\partial z} dx dy dz = \iint_S A_z dx dy.$$

同样,有

$$\iiint_V \frac{\partial A_x}{\partial x} dx dy dz = \iint_S A_x dy dz,$$

$$\iiint_V \frac{\partial A_y}{\partial y} dx dy dz = \iint_S A_y dz dx.$$

因此,把这些式子加在一起,就得出

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{A} dx dy dz = \iint_S (A_x dy dz + A_y dz dx + A_z dx dy).$$

从这里又得到下面关于散度的定理。

散度定理 对于一个向量场 \mathbf{A} 及闭曲面 S , 有

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \quad (23.2)$$

成立。

特别以 $\mathbf{A} = -\nabla f$ 时, 则由于

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = -\nabla^2 f, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial f}{\partial n},$$

从上面的定理就有

$$\iiint_V \nabla^2 f dV = \iint_S \frac{\partial f}{\partial n} dS. \quad (23.3)$$

和(23.1)同样,有

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial x} dx dy dz = \iint_S f dy dz \quad (23.4)$$

及

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial y} dx dy dz = \iint_S f dz dx. \quad (23.5)$$

这两个式子和(23.1)加在一起,又得出

$$\iiint_V \nabla f dV = \iint_S f \cdot \mathbf{n} dS. \quad (23.6)$$

在上式中以 $f=1$, 則有

$$\iint_S \mathbf{n} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (23.7)$$

如果在 (23.5) 內以 $f=A_x$, 在 (23.1) 內以 $f=A_y$, 則

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial A_x}{\partial y} dx dy dz &= \iint_S A_x dz dx, \\ \iiint_V \frac{\partial A_y}{\partial z} dx dy dz &= \iint_S A_y dx dy, \end{aligned}$$

于是得

$$\iiint_V \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) dx dy dz = \iint_S (A_x dz dx - A_y dx dy).$$

同样可得

$$\begin{aligned} \iiint_V \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) dx dy dz &= \iint_S (A_x dx dy - A_z dy dz), \\ \iiint_V \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy dz &= \iint_S (A_y dy dz - A_x dz dx). \end{aligned}$$

把这些式子加起来就可写成

$$\iiint_V \operatorname{rot} \mathbf{A} dV = \iint_S (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) dS. \quad (23.8)$$

§ 24 Stokes 定理

如在平面上給定一个以閉曲綫 K 包围的区域 Δ 和一个向量場 \mathbf{A} , 則

$$\iint_{\Delta} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dS = \int_K (A_x dx + A_y dy), \quad (24.1)$$

在微积分学中已經学到过, 这个关系称做是平面內的 **Stokes 定理**。現在把这个定理扩充到关于空間閉曲綫 C 所包围的曲面 S 上去。

首先証明这样一桩事实: 对于任意函数 $f(x, y, z)$, 有

$$\int_C f dx = \iint_S \left(\frac{\partial f}{\partial z} dz dx - \frac{\partial f}{\partial y} dx dy \right).$$

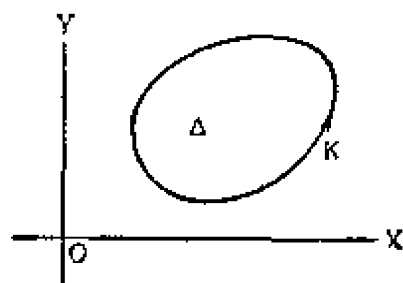


图 24.1

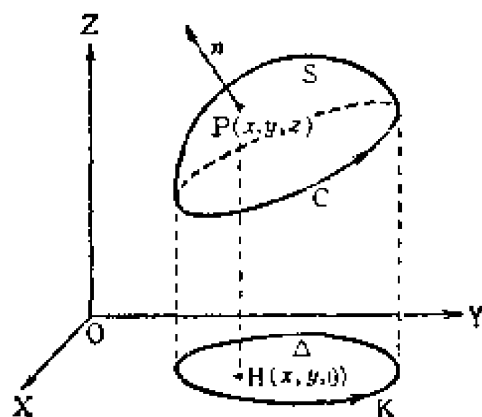


图 24.2

为简单起见, 设 S 和平行于 z 轴的直线只交于一点。在这个交点 P 处 S 的法线 n 与 z 轴所成的角常假定是锐角。 C 与 S 在 xy 平面上的垂直射影分别以 K 与 Δ 表示, P 在 xy 平面上的垂直射影以 $H(x, y, 0)$ 表示。这样, 曲面就可用单值函数

$$z = g(x, y)$$

表示。如以 $F(x, y) = f(x, y, g(x, y))$, 则

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y}.$$

在(24.1)式内, 如果引入以 $A_x = F(x, y)$, $A_y = 0$ 为支量的向量, 则

$$-\iint_{\Delta} \frac{\partial F}{\partial y} dS' = \int_K F dx.$$

令

$$F = f, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y}, \quad dS' = dx dy,$$

则得到

$$-\iint_S \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) dx dy = \int_C f dx.$$

但由于

$$dy dz : dz dx : dx dy = \frac{\partial z}{\partial x} : \frac{\partial z}{\partial y} : -1,$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial y} dx dy = -dz dx.$$

因此,有

$$-\iint_s \left(\frac{\partial f}{\partial y} dx dy - \frac{\partial f}{\partial z} dz dx \right) = \int_c f dx,$$

亦即

$$\int_c f dx = \iint_s \left(\frac{\partial f}{\partial z} dz dx - \frac{\partial f}{\partial y} dx dy \right). \quad (24.2)$$

如果 n 与 z 轴所成的角是钝角, 则 dS' 的符号改变, 因而 K 的方向也改变, 上式照样成立。还有, 当 S 和平行于 z 轴的直线不只交于一点时, 则把 S 划分成若干个满足以上假设的部分, 仍可使式子成立。

同样可证

$$\int_c f dy = \iint_s \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx dy - \frac{\partial f}{\partial z} dy dz \right), \quad (24.3)$$

$$\int_c f dz = \iint_s \left(\frac{\partial f}{\partial y} dy dz - \frac{\partial f}{\partial x} dz dx \right). \quad (24.4)$$

在这些式内分别设 $f = A_x, A_y, A_z$, 则有

$$\int_c A_x dx = \iint_s \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} dz dx - \frac{\partial A_x}{\partial y} dx dy \right),$$

$$\int_c A_y dy = \iint_s \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} dx dy - \frac{\partial A_y}{\partial z} dy dz \right),$$

$$\int_c A_z dz = \iint_s \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} dy dz - \frac{\partial A_z}{\partial x} dz dx \right),$$

因此, 得出

$$\begin{aligned} \int_c (A_x dx + A_y dy + A_z dz) = & \iint_s \left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) dy dz \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy \right], \end{aligned}$$

亦即

$$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} \, ds = \iint_S \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} \, dS.$$

这就是 Stokes 定理。这定理的逆定理也成立,那就是:

定理 对于任意的闭曲线 C 与其包围的曲面 S , 如有

$$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} \, ds = \iint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} \, dS,$$

则

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

因为由 Stokes 定理

$$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} \, ds = \iint_S \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} \, dS$$

及假设,就有

$$\iint_S \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B} - \operatorname{rot} \mathbf{A}) \, dS = 0,$$

由于 S 是任意的曲面,于是有

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B} - \operatorname{rot} \mathbf{A}) = 0.$$

又因 \mathbf{n} 也是任意的, $\mathbf{B} - \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$, 即

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

在 Stokes 定理内,如 $\mathbf{A} = -\operatorname{grad} f$, 则由

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = -\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$$

而得

$$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} \, ds = \iint_S \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} \, dS = 0.$$

还有, (24.2、3、4) 也可合并写成

$$\int_C f \, d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{n} \times \nabla f \, dS.$$

在 (24.3) 里以 z 代替 f , (24.4) 里以 y 代替 f , 然后由后者减去前者, 即得

$$\int_C (ydz - zdy) = 2 \iint_S dy dz.$$

同样,有

$$\int_C (zdx - xdz) = 2 \iint_S dz dx,$$

$$\int_C (xdy - ydx) = 2 \iint_S dx dy,$$

把它们总和起来写,则有

$$\int_C \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = 2 \iint_S \mathbf{n} \cdot d\mathbf{S}.$$

§ 25 Green 定理

設閉曲面 S 包围的区域为 V , 数量场 $f(x, y, z)$ 与 $g(x, y, z)$ 給定后,则有

$$\iint_S f \frac{\partial g}{\partial n} dS = \iiint_V (f \nabla^2 g + (\nabla f) \cdot (\nabla g)) dV \quad (25.1)$$

成立。但法綫的方向假定是从 S 的内部朝向外外部。

作向量 $f \cdot \nabla g$ 的散度

$$\operatorname{div}(f \cdot \nabla g) = f \nabla^2 g + (\nabla f) \cdot (\nabla g),$$

将上式在 V 上积分,则有

$$\iiint_V \operatorname{div}(f \cdot \nabla g) dV = \iiint_V (f \nabla^2 g + (\nabla f) \cdot (\nabla g)) dV.$$

另一方面,由散度定理得

$$\iiint_V \operatorname{div}(f \cdot \nabla g) dV = \iint_S f \cdot \mathbf{n} \cdot \nabla g dS = \iint_S f \frac{\partial g}{\partial n} dS.$$

比較上面二个式子就証明了(25.1)。式(25.1)称为 **Green 定理**。

在(25.1)內,交换 f 与 g 后,再就式子的两边相减,得到

$$\iint_S \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS = \iiint_V (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dV. \quad (25.2)$$

在(25.1)內,如以 $f = g$, 則得

$$\iint_S f \frac{\partial f}{\partial n} dS = \iiint_V (f \nabla^2 f + (\nabla f)^2) dV. \quad (25.3)$$

在(25.1)內,如果 g 是調和函数,亦即 $\nabla^2 g = 0$, 則有

$$\iint_S f \frac{\partial g}{\partial n} dS = \iiint_V (\nabla f) (\nabla g) dV. \quad (25.4)$$

在(25.2)內,如 f 和 g 都是調和函数,則得

$$\iint_S \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS = 0. \quad (25.5)$$

在(25.3)內,特別以 f 作为調和函数时,得到

$$\iint_S f \frac{\partial f}{\partial n} dS = \iiint_V (\nabla f)^2 dV.$$

第7章 曲綫坐标

§ 26 曲綫坐标

在已設定直交軸的空間內，設有三族曲面

$$F(x, y, z) = u^1, \quad G(x, y, z) = u^2, \quad H(x, y, z) = u^3, \quad (26.1)$$

假定在空間某一區域 D 內，當 u^1, u^2, u^3 之值被指定後，其對應的三個曲面只交於一點 P ，亦即假定

$$\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(x, y, z)} \neq 0.$$

這時，三個數值 (u^1, u^2, u^3) 指定後，三個曲面 $F = u^1, G = u^2, H = u^3$ 就被確定，因而它們的交點 P 也被唯一地確定。

反之，在空間內取一點 P ，它的直角坐標 (x, y, z) 就確定了，以它作為交點的三個曲面 (26.1) 內的 (u^1, u^2, u^3) 也就確定了。

象這樣，在區域 D 內點 P 和數組 (u^1, u^2, u^3) 成為 1 對 1 的對應，因此，可把 (u^1, u^2, u^3) 當作 P 的坐標。這項坐標叫做曲綫坐標。

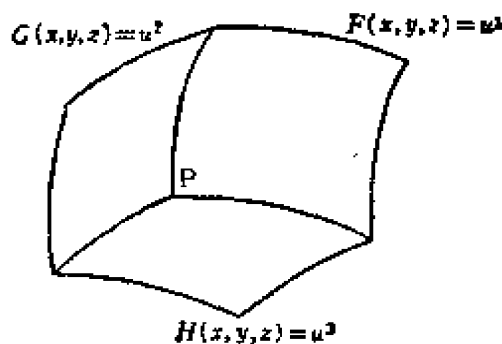


圖 26.1

這時，(26.1) 關於 x, y, z 應當是可解的，解出後，就應當得出如次形式

$$x = f(u^1, u^2, u^3), \quad y = g(u^1, u^2, u^3), \quad z = h(u^1, u^2, u^3). \quad (26.2)$$

因此，當固定 u^2, u^3 ，只讓 u^1 單獨變化時，就得出一條曲綫，這叫做 u^1 -曲綫。 u^2 -曲綫和 u^3 -曲綫可以同樣地定義。這些曲綫總

称做坐标曲线。在直线坐标系的情况下，坐标曲线是直线，至于曲线坐标系，则坐标曲线实际上是曲线，这就是曲线坐标这个名称的来源。

由 $F(x, y, z) = u^1 = \text{定值}$, $G(x, y, z) = u^2 = \text{定值}$, $H(x, y, z) = u^3 = \text{定值}$ 所定义的曲面各称做 u^1 -曲面、 u^2 -曲面、 u^3 -曲面，总称为坐标曲面。直线坐标中，坐标曲面是平面；曲线坐标中，坐标曲面实际上是曲面。

由空间一点 P 引 xy 平面的垂线，垂线足记以 H ，如令

$$OH = r, \angle XOH = \theta, HP = z,$$

则

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z,$$

(r, θ, z) 叫做点 P 的圆柱坐标或柱面坐标，这是曲线坐标的一种。

事实上， r -曲线是平行于 xy 平面且和 z 轴相交的直线， θ -曲线是在 xy 平面的平行平面上，且是中心在 z 轴上的圆， z -曲线是垂直于 xy 平面的直线。再者， r -曲面是以 z 轴为中心轴的圆柱面， θ -曲面是包含 z 轴的平面， z -曲面是平行于 xy 平面的平面。

由空间一点 P 引 xy 平面的垂线 PH ，如令

$$OP = r, \angle ZOP = \theta, \angle XOH = \varphi,$$

则

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi,$$

$$z = r \cos \theta.$$

这里的 (r, θ, φ) 叫做点 P 的极坐标或球面坐标，这也是一种曲线坐标。

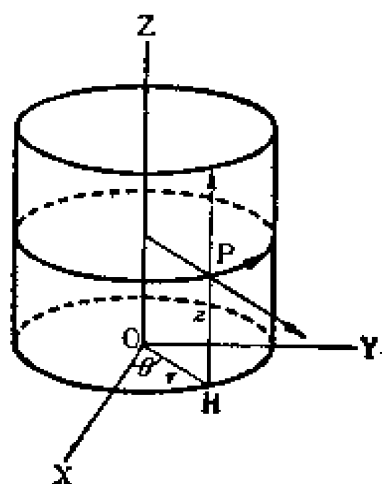


图 26.2

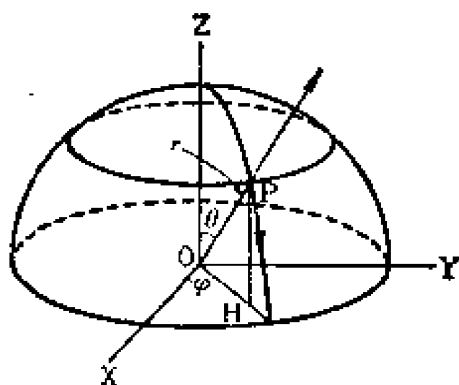


图 26.3

事实上, r -曲线是过原点的直线, θ -曲线位于过 z 轴的平面上, 是以原点为中心的圆, φ -曲线位于 xy 平面的平行平面上, 且是中心在 z 轴上的圆。再者, r -曲面是以原点为中心的球面, θ -曲面是以原点为顶点、 z 轴为中心轴的直圆锥面, φ -曲面是包含 z 轴的平面。

§ 27 基本形式

现设以曲线坐标 (u^1, u^2, u^3) 来表示某一区域内的点 P , 从直角坐标系的原点 O 引到点 P 的向量记以 X , 则 X 可考虑为 (u^1, u^2, u^3) 的函数。如令

$$X_1 = \frac{\partial X}{\partial u^1}, \quad X_2 = \frac{\partial X}{\partial u^2}, \quad X_3 = \frac{\partial X}{\partial u^3},$$

那么, 它们就是切于 u^1 -曲线、 u^2 -曲线、 u^3 -曲线的向量, 由前节的假定, 它们是线性无关的。这就是说, 这些向量组成向量的三重系。

从原点 O 出发, 对应于曲线坐标

$$(u^\mu) (\mu, \lambda, \mu, \dots = 1, 2, 3)$$

的向量记为 $X(u)$, 对应于曲线坐标 $(u^\mu + du^\mu)$ 的向量记为 $X + dX$, 则因

$$dX = X_1 du^1 + X_2 du^2 + X_3 du^3,$$

以 (u^μ) 为曲线坐标的点和以 $(u^\mu + du^\mu)$ 为曲线坐标的点, 它们之间的距离 ds , 亦即 dX 之长由下式给出

$$\begin{aligned} ds^2 &= dX \cdot dX \\ &= (X_1 du^1 + X_2 du^2 + X_3 du^3) (X_1 du^1 + X_2 du^2 + X_3 du^3). \end{aligned}$$

因此, 如令

$$g_{\mu\lambda} = X_\mu \cdot X_\lambda,$$

则

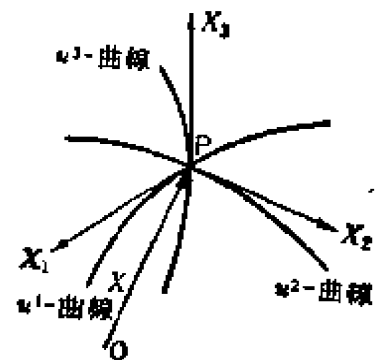


图 27.1

$$ds^2 = g_{\mu\lambda}(u) du^\mu du^\lambda.$$

这个式子称为基本度量形式(fundamental metric form)。

在这里, g_{11} , g_{22} , g_{33} 分别是向量 X_1 , X_2 , X_3 之长的平方。如 X_2 与 X_3 , X_3 与 X_1 , X_1 与 X_2 所成的角, 亦即, u^2 -曲线与 u^3 -曲线、 u^3 -曲线与 u^1 -曲线、 u^1 -曲线与 u^2 -曲线所成的角各记以 θ_{23} , θ_{31} , θ_{12} , 则

$$\cos \theta_{23} = \frac{g_{23}}{\sqrt{g_{22}} \sqrt{g_{33}}}, \quad \cos \theta_{31} = \frac{g_{31}}{\sqrt{g_{33}} \sqrt{g_{11}}},$$

$$\cos \theta_{12} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{22}}}.$$

因此, 坐标曲线两两正交的必要与充分条件是

$$g_{23} = g_{31} = g_{12} = 0,$$

满足这条件的曲线坐标系叫做正交曲线坐标系(orthogonal curvilinear coordinates)。

对于空间的体积元素 $dV = dx dy dz$, 因有

$$dV = dx dy dz = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u^1} & \frac{\partial y}{\partial u^1} & \frac{\partial z}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x}{\partial u^2} & \frac{\partial y}{\partial u^2} & \frac{\partial z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u^3} & \frac{\partial y}{\partial u^3} & \frac{\partial z}{\partial u^3} \end{vmatrix} du^1 du^2 du^3,$$

而且因为

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u^1} & \frac{\partial y}{\partial u^1} & \frac{\partial z}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x}{\partial u^2} & \frac{\partial y}{\partial u^2} & \frac{\partial z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u^3} & \frac{\partial y}{\partial u^3} & \frac{\partial z}{\partial u^3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u^1} & \frac{\partial x}{\partial u^2} & \frac{\partial x}{\partial u^3} \\ \frac{\partial y}{\partial u^1} & \frac{\partial y}{\partial u^2} & \frac{\partial y}{\partial u^3} \\ \frac{\partial z}{\partial u^1} & \frac{\partial z}{\partial u^2} & \frac{\partial z}{\partial u^3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix},$$

所以如把 $g_{\mu\lambda}$ 所成的行列式写做 g 时, 则体积元素可由

$$dV = \sqrt{g} du^1 du^2 du^3$$

給出。

由于圓柱坐标滿足

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z,$$

如以 $r = u^1$, $\theta = u^2$, $z = u^3$ 时, 則向量 X_1, X_2, X_3 之直角坐标 (支量) 分別是

$$X_1: (\cos \theta \quad \sin \theta \quad 0)$$

$$X_2: (-r \sin \theta \quad r \cos \theta \quad 0)$$

$$X_3: (0 \quad 0 \quad 1),$$

故 $g_{\mu\lambda}$ 的值可表列为

$$g_{\mu\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

因而

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2,$$

$$dV = r \, dr \, d\theta \, dz.$$

从此也可看出圓柱坐标系是一种正交曲綫坐标系。

再看极坐标系的情况。由于

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

如以 $r = u^1$, $\theta = u^2$, $\varphi = u^3$, 則向量 X_1, X_2, X_3 之坐标 (支量) 分別是

$$X_1: (\sin \theta \cos \varphi \quad \sin \theta \sin \varphi \quad \cos \theta)$$

$$X_2: (r \cos \theta \cos \varphi \quad r \cos \theta \sin \varphi \quad -r \sin \theta)$$

$$X_3: (-r \sin \theta \sin \varphi \quad r \sin \theta \cos \varphi \quad 0),$$

故 $g_{\mu\lambda}$ 的值可表列为

$$g_{\mu\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix},$$

因而

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2,$$

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi.$$

从此也可看出极坐标系也是一种正交曲綫坐标系。

§ 28 关于曲綫坐标系的支量

在空間内一点 P 处, 考虑一个向量 \boldsymbol{v} . 在这个 P 点的地方, 有三个綫性无关的向量所組成的三重系 \boldsymbol{X}_λ , 因此, 向量 \boldsymbol{v} 可写成

$$\boldsymbol{v} = v^\lambda \boldsymbol{X}_\lambda = v^1 \boldsymbol{X}_1 + v^2 \boldsymbol{X}_2 + v^3 \boldsymbol{X}_3.$$

这时, 我們說向量三重系 \boldsymbol{X}_λ 是关于曲綫坐标 (u_λ) 的自然标架, (v^λ) 叫做向量 \boldsymbol{v} 关于自然标架 \boldsymbol{X}_λ 的逆变支量。

在这情况下, 向量 \boldsymbol{v} 之长 v 的平方是

$$(v)^2 = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = (v^\lambda \boldsymbol{X}_\lambda) (v^\mu \boldsymbol{X}_\mu) = (\boldsymbol{X}_\lambda \cdot \boldsymbol{X}_\mu) v^\lambda v^\mu,$$

也就是

$$(v)^2 = g_{\lambda\mu} v^\lambda v^\mu.$$

两个向量

$$\boldsymbol{v} = v^\lambda \boldsymbol{X}_\lambda = v^1 \boldsymbol{X}_1 + v^2 \boldsymbol{X}_2 + v^3 \boldsymbol{X}_3,$$

$$\boldsymbol{w} = w^\mu \boldsymbol{X}_\mu = w^1 \boldsymbol{X}_1 + w^2 \boldsymbol{X}_2 + w^3 \boldsymbol{X}_3$$

的内积由

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = (v^\lambda \boldsymbol{X}_\lambda) (w^\mu \boldsymbol{X}_\mu) = (\boldsymbol{X}_\lambda \cdot \boldsymbol{X}_\mu) v^\lambda w^\mu = g_{\lambda\mu} v^\lambda w^\mu$$

所給出。因此, 它們所成的角 θ 由下式給出:

$$\cos \theta = \frac{g_{\lambda\mu} v^\lambda w^\mu}{\sqrt{g_{\lambda\mu} v^\lambda v^\mu} \sqrt{g_{\lambda\mu} w^\lambda w^\mu}}.$$

現在来研究, 对曲綫坐标施以变换

$$u^{\lambda'} = f^{\lambda'}(u^1, u^2, u^3), \quad \left| \frac{\partial u^{\lambda'}}{\partial u^\lambda} \right| \neq 0$$

或其逆变换

$$u^x = f^x(u^{1'}, u^{2'}, u^{3'}), \quad \left| \frac{\partial u^x}{\partial u^{x'}} \right| \neq 0$$

时,自然标架 X_λ 所受到的变换。

由定义,有

$$\begin{aligned} X_{x'} &= \frac{\partial X}{\partial u^{x'}} = \frac{\partial u^\lambda}{\partial u^{x'}} \frac{\partial X}{\partial u^\lambda} = \frac{\partial u^\lambda}{\partial u^{x'}} X_\lambda, \\ X_\lambda &= \frac{\partial X}{\partial u^\lambda} = \frac{\partial u^{x'}}{\partial u^\lambda} \frac{\partial X}{\partial u^{x'}} = \frac{\partial u^{x'}}{\partial u^\lambda} X_{x'}, \end{aligned}$$

因此,如令

$$\frac{\partial u^\lambda}{\partial u^{x'}} = A_{x'}^\lambda, \quad \frac{\partial u^{x'}}{\partial u^\lambda} = A_\lambda^{x'},$$

则得到

$$X_{x'} = A_{x'}^\lambda X_\lambda, \quad X_\lambda = A_\lambda^{x'} X_{x'}.$$

如果向量 v 对于曲线坐标系 (u^x) 有关的自然标架 X_λ 写成

$$v = v^x X_\lambda,$$

对于曲线坐标系 $(u^{x'})$ 有关的自然标架 $X_{x'}$ 写成

$$v = v^{x'} X_{x'},$$

在

$$v^{x'} X_{x'} = v^x X_\lambda$$

里以 $X_\lambda = A_\lambda^{x'} X_{x'}$ 代入,则有

$$v^{x'} X_{x'} = v^x A_\lambda^{x'} X_{x'}.$$

再注意到 $X_{x'}$ 是线性无关的,则得到

$$v^{x'} = A_\lambda^{x'} v^\lambda.$$

由于这个原因,称 v^x 是向量 v 关于曲线坐标系 (u^x) 的逆变支量。

其次,令

$$v_\lambda = v \cdot X_\lambda,$$

则有

$$v_{x'} = v \cdot X_{x'} = v A_\lambda^{x'} X_\lambda = A_\lambda^{x'} v_\lambda,$$

亦即

$$v_{\lambda'} = A_{\lambda'}^{\lambda} v_{\lambda}.$$

由于这原因, 称 v_{λ} 是向量 \mathbf{v} 关于曲綫坐标系 (u^{κ}) 的协变支量。

逆变支量与协变支量間的关系有

$$v_{\lambda} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{X}_{\lambda} = (v^{\kappa} \mathbf{X}_{\kappa}) \cdot \mathbf{X}_{\lambda} = v^{\kappa} g_{\kappa\lambda},$$

亦即

$$v_{\lambda} = v^{\kappa} g_{\kappa\lambda} \quad \text{以及} \quad v^{\kappa} = g^{\kappa\lambda} v_{\lambda}.$$

由于

$$g_{\lambda'\lambda''} = \mathbf{X}_{\lambda'} \cdot \mathbf{X}_{\lambda''} = (A_{\lambda'}^{\lambda} \mathbf{X}_{\lambda}) (A_{\lambda''}^{\mu} \mathbf{X}_{\mu}) = A_{\lambda'}^{\lambda} A_{\lambda''}^{\mu} (\mathbf{X}_{\lambda} \mathbf{X}_{\mu}),$$

所以基本形式的系数 $g_{\lambda\mu}$ 受到的变换是

$$g_{\lambda'\lambda''} = A_{\lambda'}^{\lambda} A_{\lambda''}^{\mu} g_{\lambda\mu}.$$

利用 § 13 的說法, 由于曲綫坐标的变换而受到如上变换的量称为張量, 因此, $g_{\lambda\mu}$ 可叫做基本度量張量。

取以上变换式两边的行列式, 則有

$$g' = \Delta^2 g,$$

其中

$$\Delta = |A_{\lambda'}^{\lambda}|.$$

如果注意到 $g' > 0$, $g > 0$, 則当 $\Delta > 0$ 时,

$$\sqrt{g'} = \Delta \sqrt{g}.$$

受这样变换的量称做(重为 1 的)密度。

在正交曲綫坐标系的情况下, $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ 是互相正交的。但 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ 并不是单位向量。因此, 如令

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \mathbf{X}_1, \quad \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \mathbf{X}_2, \quad \mathbf{w} = \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \mathbf{X}_3,$$

則化为单位向量。任意向量 \mathbf{A} 写成

$$\mathbf{A} = A_u \mathbf{u} + A_v \mathbf{v} + A_w \mathbf{w}$$

时, 常把这里出現的 A_u, A_v, A_w , 称为 \mathbf{A} 关于正交曲綫坐标的支量。

例如,在圆柱坐标系的情况下,有

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1(\cos \theta, \sin \theta, 0), \\ \mathbf{X}_2(-r \sin \theta, r \cos \theta, 0), \\ \mathbf{X}_3(0, 0, 1). \end{aligned}$$

由于这时

$$g_{11}=1, \quad g_{22}=r^2, \quad g_{33}=1,$$

而得

$$\mathbf{u}(\cos \theta, \sin \theta, 0), \quad \mathbf{v}(-\sin \theta, \cos \theta, 0), \quad \mathbf{w}(0, 0, 1),$$

因此,任意向量 $\mathbf{A}(A_x, A_y, A_z)$ 写成

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{u} + A_\theta \mathbf{v} + A_z \mathbf{w}$$

时,则

$$\begin{aligned} A_r &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = A_x \cos \theta + A_y \sin \theta, \\ A_\theta &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = -A_x \sin \theta + A_y \cos \theta, \\ A_z &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{w} = A_z. \end{aligned}$$

再例如对于极坐标系,有

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), \\ \mathbf{X}_2(r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, -r \sin \theta), \\ \mathbf{X}_3(-r \sin \theta \sin \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, 0). \end{aligned}$$

这时

$$g_{11}=1, \quad g_{22}=r^2, \quad g_{33}=r^2 \sin^2 \theta,$$

因而有

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), \\ \mathbf{v}(\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta), \\ \mathbf{w}(-\sin \varphi, \cos \varphi, 0). \end{aligned}$$

因此,任意向量 $\mathbf{A}(A_x, A_y, A_z)$ 写成

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{u} + A_\theta \mathbf{v} + A_\varphi \mathbf{w}$$

时,则

$$A_r = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = A_x \sin \theta \cos \varphi + A_y \sin \theta \sin \varphi + A_z \cos \theta,$$

$$A_\theta = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = A_x \cos \theta \cos \varphi + A_y \cos \theta \sin \varphi - A_z \sin \theta,$$

$$A_\varphi = \mathbf{A} \cdot \mathbf{w} = -A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi.$$

§ 29 基本方程

对于空间内各点 \mathbf{X} 都配备以自然标架 \mathbf{X}_λ . 因为 \mathbf{X}_λ 是由

$$\mathbf{X}_\lambda = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^\lambda}$$

所规定的, 当然应满足

$$d\mathbf{X} = du^\mu \mathbf{X}_\mu.$$

作 \mathbf{X}_λ 关于 u^μ 的偏导数 $\frac{\partial \mathbf{X}_\lambda}{\partial u^\mu} = \partial_\mu \mathbf{X}_\lambda$, 因为它仍然是向量, 所以它就应当可用 \mathbf{X}_σ 的线性组合来表示, 也就是说, 可写成

$$\partial_\mu \mathbf{X}_\lambda = \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \mathbf{X}_\sigma.$$

现在我们将对出现在这里的函数 $\Gamma_{\mu\lambda}^\sigma(u)$ 加以决定. 首先, 由于 $\partial_\mu \mathbf{X}_\lambda = \partial_\mu \mathbf{X}_\mu$, 就有

$$\Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \mathbf{X}_\sigma = \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma \mathbf{X}_\sigma,$$

亦即

$$\Gamma_{\mu\lambda}^\sigma = \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma.$$

对

$$g_{\lambda\rho} = \mathbf{X}_\lambda \cdot \mathbf{X}_\rho$$

的两边作关于 u^μ 的偏微分, 则得

$$\partial_\mu g_{\lambda\rho} = (\partial_\mu \mathbf{X}_\lambda) \cdot \mathbf{X}_\rho + \mathbf{X}_\lambda \cdot (\partial_\mu \mathbf{X}_\rho).$$

用

$$\partial_\mu \mathbf{X}_\lambda = \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \mathbf{X}_\sigma, \quad \partial_\mu \mathbf{X}_\rho = \Gamma_{\mu\rho}^\sigma \mathbf{X}_\sigma$$

代入, 得到

$$\partial_\mu g_{\lambda\rho} = \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \mathbf{X}_\sigma \cdot \mathbf{X}_\rho + \mathbf{X}_\lambda \cdot \Gamma_{\mu\rho}^\sigma \mathbf{X}_\sigma = \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma (\mathbf{X}_\sigma \cdot \mathbf{X}_\rho) + \Gamma_{\mu\rho}^\sigma (\mathbf{X}_\lambda \cdot \mathbf{X}_\sigma),$$

亦即

$$\partial_{\mu} g_{\lambda\rho} = \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma} g_{\sigma\rho} + \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} g_{\lambda\sigma}.$$

在这式内交换 μ 与 λ , 有

$$\partial_{\lambda} g_{\mu\rho} = \Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} g_{\sigma\rho} + \Gamma_{\lambda\rho}^{\sigma} g_{\mu\sigma},$$

在同一式内交换 λ 与 ρ , 则有

$$\partial_{\rho} g_{\mu\lambda} = \Gamma_{\rho\mu}^{\sigma} g_{\sigma\lambda} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\sigma} g_{\mu\sigma},$$

在上面三式中, 以第一式加第二式, 然后减去第三式, 并注意到 $\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} = \Gamma_{\lambda\mu}^{\kappa}$, 就得到

$$\partial_{\mu} g_{\lambda\rho} + \partial_{\lambda} g_{\mu\rho} - \partial_{\rho} g_{\mu\lambda} = 2\Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma} g_{\sigma\rho}.$$

就这最后式子的两边各乘以 $\frac{1}{2} g^{\kappa\rho}$, 然后关于 ρ 就 1, 2, 3 总和起来, 则右边是

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma} g_{\sigma\rho} g^{\kappa\rho} = \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma} \delta_{\sigma}^{\kappa} = \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa},$$

因此, 最后结果是

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} = \frac{1}{2} g^{\kappa\rho} (\partial_{\mu} g_{\lambda\rho} + \partial_{\lambda} g_{\mu\rho} - \partial_{\rho} g_{\mu\lambda}).$$

这个式子的右边普通用記号

$$\left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\kappa\rho} (\partial_{\mu} g_{\lambda\rho} + \partial_{\lambda} g_{\mu\rho} - \partial_{\rho} g_{\mu\lambda})$$

来表示, 叫做 Christoffel 三指标記号。利用这个記号, 上面那个式子可写为

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} = \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\},$$

从而得出方程

$$\partial_{\mu} X_{\lambda} = \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\} X_{\kappa}.$$

这个式子称作曲綫坐标系的基本方程。

上式也可改写成

$$dX_{\lambda} = \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\} du^{\mu} X_{\kappa},$$

这就是 X_{λ} 的变化 dX_{λ} 用 X_{κ} 本身来表示的表达式。

如果对于曲綫坐标施以变换

$$u^{\lambda'} = f^{\lambda'}(u^1, u^2, u^3),$$

則在新坐标下,基本方程应该有形式

$$\partial_{\mu'} X_{\lambda'} = \left\{ \begin{matrix} \kappa' \\ \mu' \lambda' \end{matrix} \right\} X_{\kappa'}.$$

我們將求在曲綫坐标 (u^{κ}) 下的 Christoffel 記号 $\left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu \lambda \end{matrix} \right\}$ 与在曲綫坐标 $(u^{\kappa'})$ 下的 Christoffel 記号 $\left\{ \begin{matrix} \kappa' \\ \mu' \lambda' \end{matrix} \right\}$ 間的关系。

利用以上的式子,由于

$$X_{\lambda'} = A_{\lambda'}^{\lambda} X_{\lambda},$$

就得出

$$\begin{aligned} \partial_{\mu'} X_{\lambda'} &= (\partial_{\mu'} A_{\lambda'}^{\kappa}) X_{\kappa} + A_{\mu'}^{\mu} A_{\lambda'}^{\lambda} \partial_{\mu} X_{\lambda} \\ &= \left(\partial_{\mu'} A_{\lambda'}^{\kappa} + A_{\mu'}^{\mu} A_{\lambda'}^{\lambda} \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu \lambda \end{matrix} \right\} \right) X_{\kappa}. \end{aligned}$$

用

$$\partial_{\mu'} X_{\lambda'} = \left\{ \begin{matrix} \kappa' \\ \mu' \lambda' \end{matrix} \right\} X_{\kappa'} = A_{\kappa'}^{\kappa} \left\{ \begin{matrix} \kappa' \\ \mu' \lambda' \end{matrix} \right\} X_{\kappa}$$

代入,得到

$$\left(\partial_{\mu'} A_{\lambda'}^{\kappa} + A_{\mu'}^{\mu} A_{\lambda'}^{\lambda} \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu \lambda \end{matrix} \right\} \right) X_{\kappa} = A_{\kappa'}^{\kappa} \left\{ \begin{matrix} \kappa' \\ \mu' \lambda' \end{matrix} \right\} X_{\kappa},$$

亦即

$$A_{\kappa'}^{\kappa} \left\{ \begin{matrix} \kappa' \\ \mu' \lambda' \end{matrix} \right\} = A_{\mu'}^{\mu} A_{\lambda'}^{\lambda} \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu \lambda \end{matrix} \right\} + \partial_{\mu'} A_{\lambda'}^{\kappa}.$$

这就是 $\left\{ \begin{matrix} \kappa' \\ \mu' \lambda' \end{matrix} \right\}$ 和 $\left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu \lambda \end{matrix} \right\}$ 間的关系式。

把基本方程

$$\partial_{\mu} X_{\lambda} = \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu \lambda \end{matrix} \right\} X_{\kappa}$$

代入恒等式

$$\partial_{\nu} \partial_{\mu} X_{\lambda} = \partial_{\mu} \partial_{\nu} X_{\lambda}$$

里去試試看。首先在左边有

$$\begin{aligned}\partial_\nu \partial_\mu X_\lambda &= \partial_\nu \left(\left\{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ \mu\lambda \end{smallmatrix} \right\} X_\kappa \right) = \left(\partial_\nu \left\{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ \mu\lambda \end{smallmatrix} \right\} \right) X_\kappa + \left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \mu\lambda \end{smallmatrix} \right\} \partial_\nu X_\rho \\ &= \left(\partial_\nu \left\{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ \mu\lambda \end{smallmatrix} \right\} \right) X_\kappa + \left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \mu\lambda \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ \nu\rho \end{smallmatrix} \right\} X_\kappa,\end{aligned}$$

那就是

$$\partial_\nu \partial_\mu X_\lambda = \left[\partial_\nu \left\{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ \mu\lambda \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ \nu\rho \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \mu\lambda \end{smallmatrix} \right\} \right] X_\kappa.$$

同样在右边有

$$\partial_\mu \partial_\nu X_\lambda = \left[\partial_\mu \left\{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ \nu\lambda \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ \mu\rho \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \nu\lambda \end{smallmatrix} \right\} \right] X_\kappa.$$

因左右两边相等,所以

$$\left[\partial_\nu \left\{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ \mu\lambda \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ \nu\rho \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \mu\lambda \end{smallmatrix} \right\} \right] X_\kappa = \left[\partial_\mu \left\{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ \nu\lambda \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ \mu\rho \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \nu\lambda \end{smallmatrix} \right\} \right] X_\kappa,$$

那也就是

$$K_{\mu\lambda}^{\nu\kappa} \equiv \partial_\nu \left\{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ \mu\lambda \end{smallmatrix} \right\} - \partial_\mu \left\{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ \nu\lambda \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ \nu\rho \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \mu\lambda \end{smallmatrix} \right\} - \left\{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ \mu\rho \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \nu\lambda \end{smallmatrix} \right\} = 0.$$

这说明了在曲线坐标下的 Christoffel 记号 $\left\{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ \mu\lambda \end{smallmatrix} \right\}$ 非满足上面的恒等式不可。

§ 30 协变微分

向量场 v 关于自然标架 X_λ 表示为

$$v = v^\lambda X_\lambda,$$

兹试求其微分 dv . 因

$$dv = (dv^\lambda) X_\lambda + v^\lambda dX_\lambda,$$

对于这里的 dX_λ , 用

$$dX_\lambda = \left\{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ \mu\lambda \end{smallmatrix} \right\} du^\mu X_\kappa$$

代进去,得到

$$dv = (dv^\lambda) X_\lambda + v^\lambda \left(\left\{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ \mu\lambda \end{smallmatrix} \right\} du^\mu X_\kappa \right),$$

再写成

$$dv = \left(dv^\kappa + \left\{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ \mu\lambda \end{smallmatrix} \right\} du^\mu v^\lambda \right) X_\kappa.$$

这里出现的 dv 的逆变支量

$$\delta v^\kappa = dv^\kappa + \left\{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ \mu\lambda \end{smallmatrix} \right\} du^\mu v^\lambda$$

称为逆变支量 v^κ 的协变微分或绝对微分 (covariant or absolute differential)。

如上式写成

$$\delta v^\kappa = \left(\partial_\mu v^\kappa + \left\{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ \mu\lambda \end{smallmatrix} \right\} v^\lambda \right) du^\mu,$$

则可推知

$$\nabla_\mu v^\kappa = \partial_\mu v^\kappa + \left\{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ \mu\lambda \end{smallmatrix} \right\} v^\lambda$$

是一个张量, 称它是 v^κ 的协变导数或绝对导数。

完全同样, 试考虑向量 dv 的协变支量, 它是由 $dv \cdot X_\lambda$ 所规定的。就

$$v \cdot X_\lambda = v_\lambda$$

的两边取微分,

$$dv \cdot X_\lambda + v \cdot dX_\lambda = dv_\lambda,$$

$$dv \cdot X_\lambda = dv_\lambda - v \cdot dX_\lambda.$$

这里的 dX_λ 用

$$dX_\lambda = \left\{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ \mu\lambda \end{smallmatrix} \right\} du^\mu X_\kappa$$

来代换, 就得到

$$dv \cdot X_\lambda = dv_\lambda - v \cdot \left\{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ \mu\lambda \end{smallmatrix} \right\} du^\mu X_\kappa = dv_\lambda - \left\{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ \mu\lambda \end{smallmatrix} \right\} du^\mu (v \cdot X_\kappa),$$

再写成

$$dv \cdot X_\lambda = dv_\lambda - \left\{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ \mu\lambda \end{smallmatrix} \right\} du^\mu v_\kappa.$$

这里出现的 dv 的协变支量

$$\delta v_\lambda = dv_\lambda - \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\} du^\mu v_\kappa$$

称为协变支量 v_λ 的协变微分或绝对微分。

如上式写成

$$\delta v_\lambda = \left(\partial_\mu v_\lambda - \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\} v_\kappa \right) du^\mu,$$

则可推知

$$\nabla_\mu v_\lambda = \partial_\mu v_\lambda - \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\} v_\kappa$$

是一个张量, 称它是 v_λ 之协变导数或绝对导数。

完全同样, 张量场, 例如 $T_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa}$ 的协变微分可由

$$\begin{aligned} \delta T_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa} = & dT_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa} + \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \nu\rho \end{matrix} \right\} du^\nu T_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\rho} - \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \nu\mu \end{matrix} \right\} du^\nu T_{\rho\lambda}^{\cdot\cdot\kappa} \\ & - \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \nu\lambda \end{matrix} \right\} du^\nu T_{\mu\rho}^{\cdot\cdot\kappa} \end{aligned}$$

定义, 其协变导数可定义为

$$\nabla_\nu T_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa} = \partial_\nu T_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa} + \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \nu\rho \end{matrix} \right\} T_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\rho} - \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \nu\mu \end{matrix} \right\} T_{\rho\lambda}^{\cdot\cdot\kappa} - \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \nu\lambda \end{matrix} \right\} T_{\mu\rho}^{\cdot\cdot\kappa}.$$

某个张量的协变微分是和原张量同类的张量, 其协变导数则是比原张量多一个协变指标的张量, 这只要用 $\left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\}$ 的变换式就能够证明。

就关系式

$$g_{\mu\lambda} = \mathbf{X}_\mu \cdot \mathbf{X}_\lambda$$

的两边取微分, 则

$$dg_{\mu\lambda} = (d\mathbf{X}_\mu) \cdot \mathbf{X}_\lambda + \mathbf{X}_\mu \cdot (d\mathbf{X}_\lambda),$$

在这里用

$$d\mathbf{X}_\mu = \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \nu\mu \end{matrix} \right\} du^\nu \mathbf{X}_\kappa, \quad d\mathbf{X}_\lambda = \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \nu\lambda \end{matrix} \right\} du^\nu \mathbf{X}_\kappa$$

代入,則有

$$dg_{\mu\lambda} = \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \nu\mu \end{matrix} \right\} du^\nu X_\kappa \cdot X_\lambda + \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \nu\lambda \end{matrix} \right\} du^\nu X_\mu \cdot X_\kappa,$$

因而得到

$$dg_{\mu\lambda} = \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \nu\mu \end{matrix} \right\} du^\nu g_{\kappa\lambda} + \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \nu\lambda \end{matrix} \right\} du^\nu g_{\mu\kappa},$$

这就表示出

$$\delta g_{\mu\lambda} = dg_{\mu\lambda} - \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \nu\mu \end{matrix} \right\} g_{\kappa\lambda} du^\nu - \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \nu\lambda \end{matrix} \right\} g_{\mu\kappa} du^\nu = 0,$$

亦即, $g_{\mu\kappa}$ 的协变微分等于 0. 从而, $g_{\mu\lambda}$ 的协变导数当然也等于 0, 这就是說

$$\nabla_\nu g_{\mu\lambda} = \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \nu\mu \end{matrix} \right\} g_{\kappa\lambda} - \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \nu\lambda \end{matrix} \right\} g_{\mu\kappa} = 0.$$

由于向量 v^* 的协变导数 $\nabla_\mu v^*$ 是一个張量, 因此, 对于它还可作出协变导数 $\nabla_\nu \nabla_\mu v^*$. 从这里計算 $\nabla_\nu \nabla_\mu v^* - \nabla_\mu \nabla_\nu v^*$, 則有

$$\nabla_\nu \nabla_\mu v^* - \nabla_\mu \nabla_\nu v^* = K_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\kappa} v^\lambda,$$

但因里面的 $K_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\kappa} = 0$, 所以

$$\nabla_\nu \nabla_\mu v^* - \nabla_\mu \nabla_\nu v^* = 0$$

成立。同样由于

$$\nabla_\nu \nabla_\mu v_\lambda - \nabla_\mu \nabla_\nu v_\lambda = -K_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\kappa} v_\kappa,$$

所以

$$\nabla_\nu \nabla_\mu v_\lambda - \nabla_\mu \nabla_\nu v_\lambda = 0$$

也成立。

§ 31 張量 $e_{\nu\mu\lambda}$ 和 $e^{\nu\mu\lambda}$

我們用下述条件来規定 $\varepsilon_{\nu\mu\lambda}$ 和 $\varepsilon^{\nu\mu\lambda}$ 这样两个記号:

$$\varepsilon_{\nu\mu\lambda} = \varepsilon^{\nu\mu\lambda} = \begin{cases} +1: & \text{当 } (\nu\mu\lambda) \text{ 是 } (123) \text{ 的偶排列时,} \\ -1: & \text{当 } (\nu\mu\lambda) \text{ 是 } (123) \text{ 的奇排列时,} \\ 0: & \text{其他情况。} \end{cases}$$

用了这样的記号 ε 容易驗証, 行列式可写做

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} = a_1^\nu a_2^\mu a_3^\lambda \varepsilon_{\nu\mu\lambda} = a_1^1 a_2^2 a_3^3 \varepsilon^{\nu\mu\lambda}.$$

如把行列式的值記为 a , 就可看出

$$a \varepsilon_{\tau\sigma\rho} = a_\tau^\nu a_\sigma^\mu a_\rho^\lambda \varepsilon_{\nu\mu\lambda}, \quad a \varepsilon^{\tau\sigma\rho} = a_\tau^1 a_\sigma^2 a_\rho^3 \varepsilon^{\nu\mu\lambda}.$$

对于 $A_{\nu'}^{\nu}$ 的行列式 Δ , 利用上面左边的写法, 有

$$\Delta \varepsilon_{\nu'\mu'\lambda'} = A_{\nu'}^\nu A_{\mu'}^\mu A_{\lambda'}^\lambda \varepsilon_{\nu\mu\lambda}; \quad (31.1)$$

对于 $A_{\nu'}^{\nu}$ 的行列式 $\frac{1}{\Delta}$, 利用上面右边的写法, 則有

$$\frac{1}{\Delta} \varepsilon^{\nu'\mu'\lambda'} = A_{\nu'}^\nu A_{\mu'}^\mu A_{\lambda'}^\lambda \varepsilon^{\nu\mu\lambda}. \quad (31.2)$$

作(31.1)和 $\sqrt{g'} = \Delta \sqrt{g}$ 的乘积, 得

$$\sqrt{g'} \varepsilon_{\nu'\mu'\lambda'} = A_{\nu'}^\nu A_{\mu'}^\mu A_{\lambda'}^\lambda \sqrt{g} \varepsilon_{\nu\mu\lambda}.$$

这个式子說明了由

$$e_{\nu\mu\lambda} = \sqrt{g} \varepsilon_{\nu\mu\lambda}$$

所定义的量是一个协变張量的支量。

作(31.2)和 $\frac{1}{\sqrt{g'}} = \frac{1}{\Delta} \frac{1}{\sqrt{g}}$ 的乘积, 得

$$\frac{1}{\sqrt{g'}} \varepsilon^{\nu'\mu'\lambda'} = A_{\nu'}^\nu A_{\mu'}^\mu A_{\lambda'}^\lambda \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{\nu\mu\lambda}.$$

这說明了, 由

$$e^{\nu\mu\lambda} = \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{\nu\mu\lambda}$$

所定义的量是一个逆变張量的支量。

因为 $\varepsilon_{\nu\mu\lambda}$ 和 $\varepsilon^{\nu\mu\lambda}$ 的每一个关于指标 ν, μ, λ 是反称的, 所以这里定义的張量 $e_{\nu\mu\lambda}$ 和 $e^{\nu\mu\lambda}$ 关于三指标 ν, μ, λ 也是反称的。

更由于

$$\begin{aligned}
e^{\nu\mu\lambda} g_{\nu\tau} g_{\mu\sigma} g_{\lambda\rho} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{\nu\mu\lambda} g_{\nu\tau} g_{\mu\sigma} g_{\lambda\rho} = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot g \cdot \varepsilon_{\tau\sigma\rho} \\
&= \sqrt{g} \varepsilon_{\tau\sigma\rho} = e_{\tau\sigma\rho}, \\
e_{\nu\mu\lambda} g^{\nu\tau} g^{\mu\sigma} g^{\lambda\rho} &= \sqrt{g} \varepsilon_{\nu\mu\lambda} g^{\nu\tau} g^{\mu\sigma} g^{\lambda\rho} = \sqrt{g} \cdot \frac{1}{g} \varepsilon^{\tau\sigma\rho} \\
&= \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{\tau\sigma\rho} = e^{\tau\sigma\rho},
\end{aligned}$$

所以 $\varepsilon^{\nu\mu\lambda}$ 和 $\varepsilon_{\nu\mu\lambda}$ 是相伴的張量。

最后試計算 $e_{\nu\mu\lambda}$ 和 $e^{\nu\mu\lambda}$ 的协变导数。因

$$\nabla_{\omega} e_{\nu\mu\lambda} = \partial_{\omega} e_{\nu\mu\lambda} - \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \omega \nu \end{matrix} \right\} e_{\kappa\mu\lambda} - \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \omega \mu \end{matrix} \right\} e_{\nu\kappa\lambda} - \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \omega \lambda \end{matrix} \right\} e_{\nu\mu\kappa},$$

所以,如 ν, μ, λ 中有两个相等的話,則式的右边恒等于0。因此,我們現在就 ν, μ, λ 各不相等,例如說 $\nu=1, \mu=2, \lambda=3$ 的情况来討論。这时

$$\begin{aligned}
\nabla_{\omega} e_{123} &= \partial_{\omega} e_{123} - \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \omega 1 \end{matrix} \right\} e_{\kappa 23} - \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \omega 2 \end{matrix} \right\} e_{1\kappa 3} - \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \omega 3 \end{matrix} \right\} e_{12\kappa} \\
&= \partial_{\omega} e_{123} - \left(\left\{ \begin{matrix} 1 \\ \omega 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 2 \\ \omega 2 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 3 \\ \omega 3 \end{matrix} \right\} \right) e_{123}.
\end{aligned}$$

但因 $e_{123} = \sqrt{g}$, 所以有

$$\nabla_{\omega} e_{123} = \partial_{\omega} \sqrt{g} - \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \omega \kappa \end{matrix} \right\} \sqrt{g}. \quad (31.3)$$

另一方面,有

$$\left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \omega \kappa \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\kappa\rho} (\partial_{\omega} g_{\kappa\rho} + \partial_{\kappa} g_{\omega\rho} - \partial_{\rho} g_{\omega\kappa}) = \frac{1}{2} g^{\kappa\rho} \partial_{\omega} g_{\kappa\rho}.$$

在行列式

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$$

內,元素 $g_{\kappa\rho}$ 的余因式是 $g g^{\kappa\rho}$, 所以由行列式的微分法則, g 的微分可写做

$$\partial_{\omega} g = (\partial_{\omega} g_{\kappa\rho}) g g^{\kappa\rho},$$

因而,

$$g^{\kappa\rho}(\partial_{\omega}g_{\kappa\rho}) = \partial_{\omega} \log g,$$

把它代进前面的式子里,就有

$$\left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \omega \kappa \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\kappa\rho}(\partial_{\omega}g_{\kappa\rho}) = \frac{1}{2} \partial_{\omega} \log g = \partial_{\omega} \log \sqrt{g}.$$

由这式和(31.3),就得到

$$\nabla_{\omega} \epsilon_{123} = 0.$$

因此,有

$$\nabla_{\omega} \epsilon_{\nu\mu\lambda} = 0,$$

同样,有

$$\nabla_{\omega} \epsilon^{\nu\mu\lambda} = 0.$$

§ 32 梯 度

設空間內有一个数量 f , 它和曲綫坐标 (u^{κ}) 有关而写成 $f(u^{\kappa})$. 这个数量場的协变微分

$$\nabla_{\lambda} f = \partial_{\lambda} f$$

是一个向量的协变支量。因此,

$$\nabla^{\kappa} f = g^{\kappa\lambda} \nabla_{\lambda} f = g^{\kappa\lambda} \partial_{\lambda} f$$

是它的逆变支量。

如果坐标系是由正交軸构成的, 則因上式的最右边部分就 $\kappa=1, 2, 3$ 而論, 分別是

$$\frac{\partial f}{\partial u^1}, \frac{\partial f}{\partial u^2}, \frac{\partial f}{\partial u^3},$$

亦即

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z},$$

所以 $\nabla_{\lambda} f$ 与 $\nabla^{\kappa} f$ 是曲綫坐标系下 f 的梯度的支量。

在正交曲綫坐标系下, $\nabla^{\kappa} f$ 的支量是

$$\nabla^1 f = g^{11} \frac{\partial f}{\partial u^1}, \quad \nabla^2 f = g^{22} \frac{\partial f}{\partial u^2}, \quad \nabla^3 f = g^{33} \frac{\partial f}{\partial u^3},$$

或

$$\nabla^1 f = \frac{1}{g_{11}} \frac{\partial f}{\partial u^1}, \quad \nabla^2 f = \frac{1}{g_{22}} \frac{\partial f}{\partial u^2}, \quad \nabla^3 f = \frac{1}{g_{33}} \frac{\partial f}{\partial u^3}.$$

由于 ∇f 关于自然标架 \mathbf{X}_i 可表示成

$$\nabla f = (\nabla^1 f) \mathbf{X}_1 + (\nabla^2 f) \mathbf{X}_2 + (\nabla^3 f) \mathbf{X}_3,$$

因此,在正交曲綫坐标系的情况下,如令

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \mathbf{X}_1, \quad \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \mathbf{X}_2, \quad \mathbf{w} = \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \mathbf{X}_3,$$

則有

$$\nabla f = (\sqrt{g_{11}} \nabla^1 f) \mathbf{u} + (\sqrt{g_{22}} \nabla^2 f) \mathbf{v} + (\sqrt{g_{33}} \nabla^3 f) \mathbf{w}.$$

对于圓柱坐标系而論,因有

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = 1,$$

所以

$$\nabla^1 f = \frac{\partial f}{\partial r}, \quad \nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad \nabla^3 f = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

如将梯度写成

$$\nabla f = (\text{grad}_r f) \mathbf{u} + (\text{grad}_\theta f) \mathbf{v} + (\text{grad}_z f) \mathbf{w},$$

則有

$$\text{grad}_r f = \frac{\partial f}{\partial r}, \quad \text{grad}_\theta f = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad \text{grad}_z f = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

对于极坐标系而論,因有

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = r^2 \sin^2 \theta,$$

所以

$$\nabla^1 f = \frac{\partial f}{\partial r}, \quad \nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad \nabla^3 f = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}.$$

如将梯度写成

$$\nabla f = (\text{grad}_r f) \mathbf{u} + (\text{grad}_\theta f) \mathbf{v} + (\text{grad}_\varphi f) \mathbf{w},$$

則有

$$\text{grad}_r f = \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \text{grad}_\theta f = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad \text{grad}_\varphi f = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}.$$

§ 33 散 度

在空間內給定一个向量場 A , 設它关于一个自然标架表示成

$$A = A^\kappa X_\kappa.$$

作 A^κ 的协变导数

$$\nabla_\mu A^\kappa = \partial_\mu A^\kappa + \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu \lambda \end{matrix} \right\} A^\lambda,$$

它是一个張量。对它进行縮約

$$\nabla_\mu A^\mu = \partial_\mu A^\mu + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \mu \lambda \end{matrix} \right\} A^\lambda = \partial_\mu A^\mu + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u^\lambda} A^\lambda,$$

这样就得出一个数量

$$\nabla_\mu A^\mu = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} A^\mu}{\partial u^\mu}.$$

如果坐标系是直角坐标系的話, 則右边是

$$\frac{\partial A^1}{\partial x} + \frac{\partial A^2}{\partial y} + \frac{\partial A^3}{\partial z},$$

因此, $\nabla_\mu A^\mu$ 表出了在曲綫坐标系下向量 A 的散度。

如果曲綫坐标系是正交曲綫坐标系, 則因

$$g_{23} = 0, \quad g_{31} = 0, \quad g_{12} = 0$$

以及

$$g = g_{11}g_{22}g_{33},$$

因此,

$$\begin{aligned} \nabla_\mu A^\mu = \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}} & \left[\frac{\partial \sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}}{\partial u^1} A^1 \right. \\ & \left. + \frac{\partial \sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}}{\partial u^2} A^2 + \frac{\partial \sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}}{\partial u^3} A^3 \right]. \quad (33.1) \end{aligned}$$

这时, 如向量 $A(A^1, A^2, A^3)$ 用 u, v, w 来表示, 写成

$$\mathbf{A} = A_u \mathbf{u} + A_v \mathbf{v} + A_w \mathbf{w},$$

則因

$$A_u = \sqrt{g_{11}} A^1, \quad A_v = \sqrt{g_{22}} A^2, \quad A_w = \sqrt{g_{33}} A^3,$$

从而

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla_\mu A^\mu &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}} \left[\frac{\partial \sqrt{g_{22}g_{33}} A_u}{\partial u^1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \sqrt{g_{33}g_{11}} A_v}{\partial u^2} + \frac{\partial \sqrt{g_{11}g_{22}} A_w}{\partial u^3} \right]. \end{aligned}$$

关于圆柱坐标系, 因 $g_{11}=1$, $g_{22}=r^2$, $g_{33}=1$, 所以

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} A_\theta + \frac{\partial}{\partial z} (r A_z) \right] \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} A_\theta + \frac{\partial}{\partial z} A_z. \end{aligned}$$

关于极坐标系, 因有 $g_{11}=1$, $g_{22}=r^2$, $g_{33}=r^2 \sin^2 \theta$, 所以

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta A_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta A_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r A_\varphi) \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} A_\varphi. \end{aligned}$$

当空間内一个数量場 f 給定时, 首先作它的梯度 $\nabla^\mu f = g^{\mu\lambda} \nabla_\lambda f$, 然后再考虑散度, 則得

$$\nabla_\mu (\nabla^\mu f) = \nabla_\mu (g^{\mu\lambda} \nabla_\lambda f) = g^{\mu\lambda} \nabla_\mu \nabla_\lambda f,$$

这式的右边对于直角坐标系而論, 則是

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

因此,

$$\Delta f = g^{\mu\lambda} \nabla_\mu \nabla_\lambda f$$

可看做是曲綫坐标系的 Laplace 运算子。

如果曲綫坐标系是正交曲綫坐标系, 以

$$A^1 = g^{11} \partial_1 f, \quad A^2 = g^{22} \partial_2 f, \quad A^3 = g^{33} \partial_3 f$$

代入 (33.1) 内, 即得

$$\Delta f = \nabla_{\mu}(\nabla^{\mu}f) = \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}} \left[\partial_1 \left(\frac{\sqrt{g_{22}g_{33}}}{\sqrt{g_{11}}} \partial_1 f \right) + \partial_2 \left(\frac{\sqrt{g_{33}g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}} \partial_2 f \right) + \partial_3 \left(\frac{\sqrt{g_{11}g_{22}}}{\sqrt{g_{33}}} \partial_3 f \right) \right].$$

对圆柱坐标系利用以上一般公式时, 因

$$g_{11}=1, \quad g_{22}=r^2, \quad g_{33}=1,$$

所以

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial f}{\partial z} \right) \right] \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

再对极坐标系利用一般公式时, 则因

$$g_{11}=1, \quad g_{22}=r^2, \quad g_{33}=r^2 \sin^2 \theta,$$

所以

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \end{aligned}$$

§ 34 旋 度

設空間內一个向量場 A 为已給, 并設它关于自然标架的协变支量为

$$A \cdot X_{\lambda} = A_{\lambda},$$

它的协变导数

$$\nabla_{\mu} A_{\lambda} = \partial_{\mu} A_{\lambda} - \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu \lambda \end{matrix} \right\} A_{\kappa}$$

是一个張量,因而

$$\nabla_\mu A_\lambda - \nabla_\lambda A_\mu = \partial_\mu A_\lambda - \partial_\lambda A_\mu$$

是一个反称張量。从此又知道

$$\frac{1}{2} e^{\nu\mu\lambda} (\nabla_\mu A_\lambda - \nabla_\lambda A_\mu) = \frac{1}{2} e^{\nu\mu\lambda} (\partial_\mu A_\lambda - \partial_\lambda A_\mu)$$

是一个向量。

如果坐标系是直角坐标系的話,上式的右边給出

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y},$$

因此,前式可以看做是曲綫坐标系下向量 A 的旋度。

当坐标系是正交曲綫坐标系时,設

$$A = A^\alpha X_\alpha,$$

則因 $A_\lambda = g_{\lambda\alpha} A^\alpha$, 而有

$$A_1 = g_{11} A^1, \quad A_2 = g_{22} A^2, \quad A_3 = g_{33} A^3,$$

故 A 的旋度的分量是

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} e^{1\mu\lambda} (\partial_\mu A_\lambda - \partial_\lambda A_\mu) &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}} [\partial_2 (g_{33} A^3) - \partial_3 (g_{22} A^2)], \\ \frac{1}{2} e^{2\mu\lambda} (\partial_\mu A_\lambda - \partial_\lambda A_\mu) &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}} [\partial_3 (g_{11} A^1) - \partial_1 (g_{33} A^3)], \\ \frac{1}{2} e^{3\mu\lambda} (\partial_\mu A_\lambda - \partial_\lambda A_\mu) &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}} [\partial_1 (g_{22} A^2) - \partial_2 (g_{11} A^1)]. \end{aligned}$$

这时,向量 A 和 $\text{rot } A$ 如用 u, v, w 来表示,即

$$A = A_u u + A_v v + A_w w,$$

$$\text{rot } A = (\text{rot}_u A) u + (\text{rot}_v A) v + (\text{rot}_w A) w,$$

則

$$A_u = \sqrt{g_{11}} A^1,$$

$$A_v = \sqrt{g_{22}} A^2,$$

$$A_w = \sqrt{g_{33}} A^3;$$

$$\text{rot}_u A = \sqrt{g_{11}} (\text{rot } A)^1,$$

$$\operatorname{rot}_r \mathbf{A} = \sqrt{g_{22}} (\operatorname{rot} \mathbf{A})^2,$$

$$\operatorname{rot}_u \mathbf{A} = \sqrt{g_{33}} (\operatorname{rot} \mathbf{A})^3.$$

其中 $(\operatorname{rot} \mathbf{A})^2$ 表示 $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ 关于 X_2 的逆变分量。因此,

$$\operatorname{rot}_u \mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}g_{33}}} \left[\frac{\partial \sqrt{g_{33}}}{\partial u^2} A_u - \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial u^3} A_v \right],$$

$$\operatorname{rot}_v \mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{g_{33}g_{11}}} \left[\frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial u^3} A_u - \frac{\partial \sqrt{g_{33}}}{\partial u^1} A_w \right],$$

$$\operatorname{rot}_w \mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \left[\frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial u^1} A_v - \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial u^2} A_u \right].$$

特别,当坐标是圆柱坐标时,因

$$g_{11}=1, \quad g_{22}=r^2, \quad g_{33}=1,$$

所以

$$\operatorname{rot}_r \mathbf{A} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial z} (r A_\theta) \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot}_\theta \mathbf{A} = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r},$$

$$\operatorname{rot}_z \mathbf{A} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right].$$

当坐标是极坐标时,则因

$$g_{11}=1, \quad g_{22}=r^2, \quad g_{33}=r^2 \sin^2 \theta,$$

所以

$$\operatorname{rot}_r \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (r A_\theta) \right]$$

$$= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right],$$

$$\operatorname{rot}_\theta \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta A_\varphi) \right]$$

$$= \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right],$$

$$\operatorname{rot}_\varphi \mathbf{A} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right].$$

第3篇 微分几何

第8章 曲面論

§ 35 曲 面

空間里的曲面在直角坐标下設其表現的形式为

$$x=x(u, v), y=y(u, v), z=z(u, v).$$

这里假定矩陣

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

的秩数为 2. 这时, 如果規定了曲面上的一点就有一組数 (u, v) 被确定; 反之, 如果有这样一組数 (u, v) , 則在曲面上就确定出一点, 因此, 这样的 (u, v) 可以取作曲面上点的坐标。这一事实, 如用从原点 O 引至曲面上一点 P 的位置向量 \mathbf{X} 来表达的話, 則曲面的方程可由

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(u, v)$$

給出。这时, 向量

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v}$$

是綫性无关的。

今后为了写法方便起見, 以 $u=u^1, v=u^2$; 由原点 O 引至曲面

上一点 P 的位置向量以

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(u^1, u^2)$$

表示。更設

$$\mathbf{X}_1 = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^1} = \partial_1 \mathbf{X}, \quad \mathbf{X}_2 = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^2} = \partial_2 \mathbf{X},$$

簡言之,即設

$$\mathbf{X}_i = \partial_i \mathbf{X} \quad (h, i, j, k \cdots = 1, 2).$$

在曲面上只有 u^1 变化时,曲面上即得出一条曲线,称为 u^1 -曲线。又当 u^2 单独变化时,在曲面上另得出一条曲线,称为 u^2 -曲线。由偏微分的定义就知道 \mathbf{X}_1 是切于 u^1 -曲线的向量, \mathbf{X}_2 是切于 u^2 -曲线的向量。因此,我們說 \mathbf{X}_1 与 \mathbf{X}_2 是切于曲面的向量,彼此线性无关。

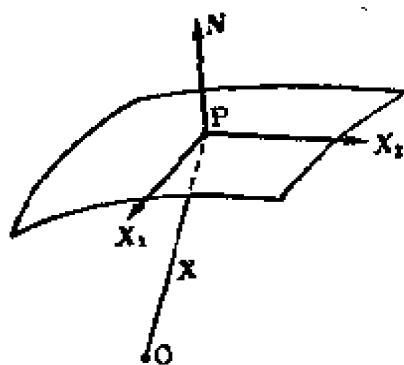


图 35.1

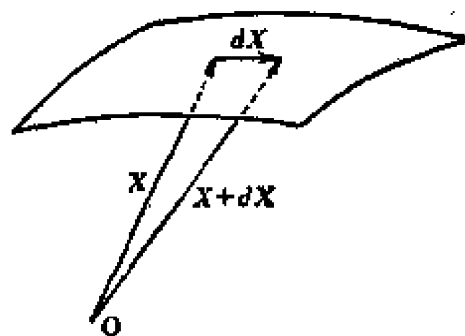


图 35.2

曲面上两点 \mathbf{X} 与 $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$ 间的距离 ds , 亦即向量 $d\mathbf{X}$ 之长, 由于

$$d\mathbf{X} = \mathbf{X}_i du^i,$$

而有

$$ds^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = (\mathbf{X}_j du^j) (\mathbf{X}_i du^i) = (\mathbf{X}_j \cdot \mathbf{X}_i) du^j du^i,$$

如令

$$g_{ji} = \mathbf{X}_j \cdot \mathbf{X}_i,$$

則有

$$ds^2 = g_{\mu} du^{\mu} du^{\mu}.$$

这个式子普通称为曲面的**第一基本形式**,如用习惯的写法,那就是

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

这里

$$g_{11} = E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2,$$

$$g_{12} = g_{21} = F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v,$$

$$g_{22} = G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2,$$

关于 u, v 的偏微分用附在下角的指标来表示。

由 g_{μ} 组成的行列式 g 当然不会是 0, 所以满足

$$g^{\mu\lambda} g_{\mu} = \delta^{\lambda}_1$$

的 g^{μ} 可以求出。如用 E, F, G 来表示, 则

$$g^{11} = \frac{G}{EG - F^2}, \quad g^{12} = g^{21} = \frac{-F}{EG - F^2}, \quad g^{22} = \frac{E}{EG - F^2}.$$

切于曲面的向量 α 可用 $\alpha = \alpha^h X_h$ 的形式表示出来, 其长 α 的平方为

$$(\alpha)^2 = (\alpha^i X_i) (\alpha^h X_h) = (X_i X_h) \alpha^i \alpha^h,$$

也就是

$$(\alpha)^2 = g_{ih} \alpha^i \alpha^h.$$

切于曲面的两个向量 α 与 β 由形式 $\alpha = \alpha^h X_h, \beta = \beta^h X_h$ 表示出来, 它们的内积是

$$\alpha \cdot \beta = (\alpha^i X_i) (\beta^h X_h) = (X_i X_h) \alpha^i \beta^h = g_{ih} \alpha^i \beta^h,$$

所以, 它们所成的角 θ 由下式确定:

$$\cos \theta = \frac{g_{ih} \alpha^i \beta^h}{\sqrt{g_{ih} \alpha^i \alpha^h} \sqrt{g_{ih} \beta^i \beta^h}}.$$

与切于曲面的两个向量 X_1 与 X_2 同时垂直且和两者组成象右旋坐标系那样关系的单位向量以 N 表示, 这向量叫做曲面的**单位法线**。这就是说

$$X_1 \cdot N = 0, X_2 \cdot N = 0, N \cdot N = 1.$$

由于向量 X_1, X_2 的长各为 $\sqrt{g_{11}}, \sqrt{g_{22}}$, 它们所成的角 θ 由 $\cos \theta = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}$ 所确定, 所以 X_1 和 X_2 作成的平行四边形的面积是

$$\begin{aligned}\sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{22}} \sin \theta &= \sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{22}} \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{g_{11}g_{22}} \sqrt{1 - \frac{g_{12}^2}{g_{11}g_{22}}} = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \sqrt{g},\end{aligned}$$

因此, 如用外积形式的話, 則 N 可表为

$$N = \frac{1}{\sqrt{g}} (X_1 \times X_2).$$

如用习惯的写法, 則 N 的支量(坐标)用 X, Y, Z 表示, 从上式得出

$$X = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} (y_u z_v - y_v z_u),$$

$$Y = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} (z_u x_v - z_v x_u),$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} (x_u y_v - x_v y_u).$$

§ 36 基本方程

在曲面 $X = X(u^1, u^2)$ 上的各点, 以切于曲面的两个綫性无关向量 X_1 与 X_2 以及垂直于它们且和它们构成右旋坐标系那样关系的单位法綫 N 結合起来。这些向量当然是綫性无关的。事实上, 从以上 N 的表达式就可証明

$$[X_1 X_2 N] = \sqrt{g},$$

因而可得出以上的結論。

作 X_i 关于 u^j 的偏微分, 所得的向量 $\partial_j X_i$ 当然可用上面三个向量的綫性組合

$$\partial_j X_i = \Gamma_{ji}^h X_h + H_{ji} N$$

表示出来。首先,我們来确定 Γ_{ji}^h ,

作

$$g_{ia} = \mathbf{X}_i \cdot \mathbf{X}_a$$

的两边关于 w^j 的偏微分,得

$$\partial_j g_{ia} = (\partial_j \mathbf{X}_i) \cdot \mathbf{X}_a + \mathbf{X}_i \cdot (\partial_j \mathbf{X}_a),$$

在这里,用前面的式子代进且注意到 $\mathbf{X}_i \cdot \mathbf{N} = 0$, 則有

$$\partial_j g_{ia} = \Gamma_{ji}^b \mathbf{X}_b \cdot \mathbf{X}_a + \mathbf{X}_i \cdot \Gamma_{ja}^b \mathbf{X}_b,$$

因而

$$\partial_j g_{ia} = \Gamma_{ji}^b g_{ba} + \Gamma_{ja}^b g_{ib}.$$

从此利用和前一章完全同样的方法,就可得出

$$\Gamma_{ji}^h = \left\{ \begin{matrix} h \\ ji \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{ha} (\partial_j g_{ia} + \partial_i g_{ja} - \partial_a g_{ji}).$$

这就是說 Γ_{ji}^h 是由 g_{ji} 所成的 Christoffel 記号。

这个 $\left\{ \begin{matrix} h \\ ji \end{matrix} \right\}$ 如用习惯的写法写出来,則經計算得到

$$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \right\} = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, \quad \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 21 \end{matrix} \right\} = \frac{GF_v - FG_u}{2(EG - F^2)},$$

$$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}, \quad \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \right\} = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)},$$

$$\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \right\} = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}, \quad \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 22 \end{matrix} \right\} = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}.$$

其次要計算 H_{ji} . 对于曲面上一点 $\mathbf{X}(w^1, w^2)$, 取非常接近于它的点 $\mathbf{X} + \mathbf{X}_i dw^i + \frac{1}{2} (\partial_j \mathbf{X}_i) dw^j dw^i$, 从这点引至 \mathbf{X} 点处, 切平面的垂綫长由式

$$\left[\mathbf{X}_i dw^i + \frac{1}{2} (\partial_j \mathbf{X}_i) dw^j dw^i \right] \mathbf{N} = \frac{1}{2} H_{ji} dw^j dw^i$$

所給出。这里出現的

$$H_{ji} dw^j dw^i$$

我們称之为第二基本形式。这个形式又可写成

$$\begin{aligned} H_{ji} du^j du^i &= (\partial_j X_i) N du^j du^i \\ &= -(\mathbf{X}_i \cdot \partial_j \mathbf{N}) du^j du^i = -d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{N}. \end{aligned}$$

如用习惯的写法, 則

$$H_{11} = L, \quad H_{12} = H_{21} = M, \quad H_{22} = N,$$

第二基本形式可表示成

$$H_{ji} du^j du^i = L du^2 + 2M du dv + N dv^2.$$

由上式知道

$$L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = -dx dX - dy dY - dz dZ,$$

因此, 可利用由前节公式求得的 X, Y, Z 而計算出 L, M, N , 这时, 就得出

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}, \\ M &= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}, \\ N &= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

象这样求得的方程

$$\partial_j \mathbf{X}_i = \begin{Bmatrix} h \\ j i \end{Bmatrix} \mathbf{X}_h + H_{ji} \mathbf{N},$$

我們称之为 Gauss 方程。

N 对于 u^i 偏微分后, 所得的 $\partial_i N$ 可应用三个綫性无关向量 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, N$ 的綫性組合

$$\partial_j N = K_j^h \mathbf{X}_h + L_j \mathbf{N}$$

表示出来。但这里的 L_j 是 0。这是因为, 在 $N \cdot N = 1$ 对于 u^i 偏微

分而得到的 $(\partial_j N) N = 0$ 里, 以上式代入的話, 即可知 $L_j = 0$. 在 $\mathbf{X}_i \cdot \mathbf{N} = 0$ 对于 u^j 偏微分后而得出的式 $(\partial_j \mathbf{X}_i) \cdot \mathbf{N} + \mathbf{X}_i \cdot \partial_j \mathbf{N} = 0$ 内, 以 Gauss 方程及上一式代进的話, 就有

$$H_{ji} + \mathbf{X}_i (K_j^h \mathbf{X}_h) = 0,$$

亦即

$$H_{ji} + K_j^h g_{ih} = 0,$$

因而得到

$$K_j^h = -H_{ji} g^{ih} = -H_j^h.$$

因此, 我們最后得出这样一个方程

$$\partial_j \mathbf{N} = -H_j^h \mathbf{X}_h.$$

我們称这个方程为 Weingarten 方程。

由

$$(\partial_j \mathbf{N}) (\partial_i \mathbf{N}) = N_{ji}$$

所成的二次形式

$$N_{ji} du^j du^i$$

有时叫做第三基本形式。如利用 Weingarten 方程計算 N_{ji} , 則有

$$\begin{aligned} N_{ji} &= (\partial_j \mathbf{N}) (\partial_i \mathbf{N}) = (-H_j^b \cdot \mathbf{X}_b) (-H_i^a \cdot \mathbf{X}_a) \\ &= H_j^b H_i^a \cdot \mathbf{X}_b \mathbf{X}_a, \end{aligned}$$

因此, 得到

$$N_{ji} = H_j^b H_i^a g_{ba},$$

或

$$N_{ji} = H_{jb} H_{ia} g^{ba}.$$

§ 37 Gauss 与 Codazzi 方程

Gauss 方程

$$\partial_j \mathbf{X}_i = \left\{ \begin{matrix} h \\ j \ i \end{matrix} \right\} \mathbf{X}_h + H_{ji} \mathbf{N}$$

的两边关于 u^k 偏微分时,有

$$\begin{aligned}\partial_k \partial_j X_i &= \left(\partial_k \left\{ \frac{h}{ji} \right\} \right) X_h + \left\{ \frac{a}{ji} \right\} (\partial_k X_a) \\ &\quad + (\partial_k H_{ji}) N + H_{ji} (\partial_k N),\end{aligned}$$

用 Gauss 方程与 Weingarten 方程代替上式中的有关项,则得

$$\begin{aligned}\partial_k \partial_j X_i &= \left(\partial_k \left\{ \frac{h}{ji} \right\} \right) X_h + \left\{ \frac{a}{ji} \right\} \left[\left\{ \frac{h}{ka} \right\} X_h + H_{ka} N \right] \\ &\quad + (\partial_k H_{ji}) N - H_{ji} H_k^{\cdot h} X_h,\end{aligned}$$

亦即

$$\begin{aligned}\partial_k \partial_j X_i &= \left[\partial_k \left\{ \frac{h}{ji} \right\} + \left\{ \frac{h}{ka} \right\} \left\{ \frac{a}{ji} \right\} - H_k^{\cdot h} H_{ji} \right] X_h \\ &\quad + \left[\partial_k H_{ji} + \left\{ \frac{a}{ji} \right\} H_{ka} \right] N.\end{aligned}$$

在这式里,交换 k 与 j 而得到另一式,两者相减,由于左边等于 0,故得

$$\begin{aligned}&\left[\partial_k \left\{ \frac{h}{ji} \right\} - \partial_j \left\{ \frac{h}{ki} \right\} + \left\{ \frac{h}{ka} \right\} \left\{ \frac{a}{ji} \right\} - \left\{ \frac{h}{ja} \right\} \left\{ \frac{a}{ki} \right\} \right. \\ &\quad \left. - H_k^{\cdot h} H_{ji} + H_j^{\cdot h} H_{ki} \right] X_h + \left[\partial_k H_{ji} - \partial_j H_{ki} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{a}{ji} \right\} H_{ka} - \left\{ \frac{a}{ki} \right\} H_{ja} \right] N = 0.\end{aligned}$$

但因 X_h 和 N 是线性无关的,所以

$$\begin{aligned}&\partial_k \left\{ \frac{h}{ji} \right\} - \partial_j \left\{ \frac{h}{ki} \right\} + \left\{ \frac{h}{ka} \right\} \left\{ \frac{a}{ji} \right\} - \left\{ \frac{h}{ja} \right\} \left\{ \frac{a}{ki} \right\} \\ &\quad = H_k^{\cdot h} H_{ji} - H_j^{\cdot h} H_{ki}, \\ &\partial_k H_{ji} - \partial_j H_{ki} + \left\{ \frac{a}{ji} \right\} H_{ka} - \left\{ \frac{a}{ki} \right\} H_{ja} = 0.\end{aligned}$$

因此如以

$$K_{kji}^{\cdot h} = \partial_k \left\{ \frac{h}{ji} \right\} - \partial_j \left\{ \frac{h}{ki} \right\} + \left\{ \frac{h}{ka} \right\} \left\{ \frac{a}{ji} \right\} - \left\{ \frac{h}{ja} \right\} \left\{ \frac{a}{ki} \right\},$$

$$\nabla_k H_{ji} = \partial_k H_{ji} - \left\{ \begin{matrix} a \\ kj \end{matrix} \right\} H_{ai} - \left\{ \begin{matrix} a \\ ki \end{matrix} \right\} H_{ja},$$

則得出下面两个式子

$$K_{kji}^{\dots h} = H_k^h H_{ji} - H_j^h H_{ki},$$

$$\nabla_k H_{ji} - \nabla_j H_{ki} = 0.$$

这两个式子分別称为 Gauss 方程与 Godazzi 方程。

对于 Weingarten 方程

$$\partial_j N = -H_j^i X_i,$$

作关于 u^k 的偏微分, 則得

$$\partial_k \partial_j N = -(\partial_k H_j^i) X_i - H_j^a \partial_k X_a.$$

在这式里用 Gauss 方程代入, 有

$$\partial_k \partial_j N = -(\partial_k H_j^i) X_i - H_j^a \left(\left\{ \begin{matrix} i \\ ka \end{matrix} \right\} X_i + H_{ka} N \right),$$

即有

$$\partial_k \partial_j N = -\left(\partial_k H_j^i + \left\{ \begin{matrix} i \\ ka \end{matrix} \right\} H_j^a \right) X_i - H_{ka} H_j^a N.$$

在这式內使指标 k 与 j 互相交換而得到另一式, 然后将两式相減, 就有

$$-\left(\partial_k H_j^i - \partial_j H_k^i + \left\{ \begin{matrix} i \\ ka \end{matrix} \right\} H_j^a - \left\{ \begin{matrix} i \\ ja \end{matrix} \right\} H_k^a \right) X_i = 0.$$

但 X_i 是綫性无关的, 所以得到

$$\partial_k H_j^i - \partial_j H_k^i + \left\{ \begin{matrix} i \\ ka \end{matrix} \right\} H_j^a - \left\{ \begin{matrix} i \\ ja \end{matrix} \right\} H_k^a = 0.$$

今以

$$\nabla_k H_j^i = \partial_k H_j^i + \left\{ \begin{matrix} i \\ ka \end{matrix} \right\} H_j^a - \left\{ \begin{matrix} a \\ kj \end{matrix} \right\} H_a^i,$$

則上式可写成

$$\nabla_k H_j^i - \nabla_j H_k^i = 0.$$

因为 $\nabla_k g_{ji} = 0$, 所以上面的式子和

$$\nabla_k H_{jk} - \nabla_j H_{k1} = 0$$

是等价的, 这就是 Codazzi 方程。

从以上的计算看来, Gauss 与 Codazzi 方程就是曲面基本方程的可积条件。

$$\text{設} \quad K_{kj1h} = K_{kji}^{\dots a} g_{1h},$$

則容易証明, 这里出現的 K_{kj1h} 滿足

$$K_{k11h} = -K_{j11h}, \quad K_{kj1h} = -K_{kjh1},$$

$$K_{kj1h} = K_{1h1j}, \quad K_{kj1h} + K_{jk1h} + K_{1h1j} = 0.$$

Gauss 方程可改写成

$$K_{kj1h} = H_{kh} H_{jk} - H_{jh} H_{k1}.$$

因 K_{kj1h} 里面不等于 0 的量, 实质上只有 K_{1212} , 所以

$$K_{1212} = H_{12} H_{21} - H_{11} H_{22} = M^2 - LN.$$

对这样一个式子, 試求它的意义。

在曲面上一点 P , 作一个包含 P 点法綫 N 的平面, 在这个平面和曲面相截而成的截曲綫上取接近于 P 的一点 P' , 由 P' 引 $P'H$ 垂直于这个平面和在点 P 的切平面所成的交綫。这样一来, 截曲綫在点 P 的曲率 k 显然可由

$$\frac{2P'H}{PP'^2}$$

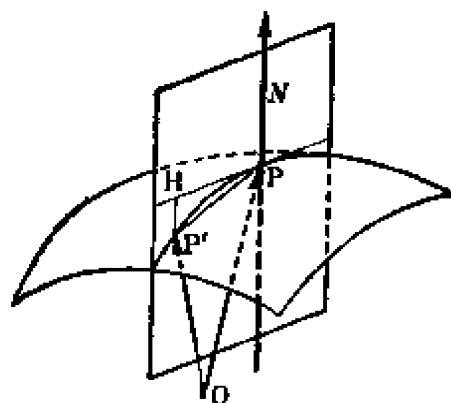


图 37.1

的极限給出^①。設原点为 O , $\overrightarrow{OP} = \mathbf{X}$, $\overrightarrow{OP'} = \mathbf{X} + d\mathbf{X}$, 由于

$$2P'H = H_{ji} du^j du^i, \quad PP'^2 = g_{jk} du^j du^k,$$

① 事实上, 作过 P' 的切綫, 設此切綫与 HP 的交角为 $\Delta\alpha$, 則

$$k = \lim \frac{\Delta\alpha}{PP'},$$

但 $\Delta\alpha \sim 2\angle P'PH$, 而 $\angle P'PH \sim \frac{P'H}{PP'}$, 所以 k 为 $\frac{2P'H}{PP'^2}$ 的极限——譯者注。

于是得

$$k = \frac{H_{ji} du^j du^i}{g_{ji} du^j du^i} = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}. \quad (37.1)$$

这也就是

$$(L - kE) du^2 + 2(M - kF) du dv + (N - kG) dv^2 = 0,$$

因此, 当 $du:dv$ 在 (37.1) 内变化时, k 的极大与极小值非满足联立方程

$$(L - kE) du + (M - kF) dv = 0,$$

$$(M - kF) du + (N - kG) dv = 0$$

不可。这就是說 k 的极大与极小值 (简称极值) 应满足

$$\begin{vmatrix} L - kE & M - kF \\ M - kF & N - kG \end{vmatrix} = 0,$$

换言之, k 的极值应是

$$(LN - M^2) - (LG + NE - 2FM)k + (EG - F^2)k^2 = 0$$

的根。这个方程的两个根 k_1 与 k_2 称为曲面在点 P 的主曲率。从此推得

$$\frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{LG - 2FM + NE}{2(EG - F^2)},$$

$$k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

这里的

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2),$$

我們称为曲面在点 P 的平均曲率或 Germain 曲率。

$$K = k_1 k_2$$

称为全曲率或 Gauss 曲率。

以上的 $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ 又可写成

$$H = \frac{1}{2} g^{jk} H_{jk}. \quad (37.2)$$

还有 $K = k_1 k_2$, 因 $K_{1212} = M^2 - LN$ 而可写成

$$K = -\frac{K_{1212}}{g}. \quad (37.3)$$

从 K_{kjth} 所滿足的性質以及 (37.3) 知道 K_{kjth} 也可写成

$$K_{kjth} = -K e_{kj} e_{th}.$$

把它代入 Gauss 方程

$$K_{kjth} = H_{kh} H_{jt} - H_{jh} H_{kt}$$

里去, 則有

$$-K e_{kj} e_{th} = H_{kh} H_{jt} - H_{jh} H_{kt},$$

这式的两边乘以 g^{ki} , 再經過縮約, 并注意到 $g^{ki} e_{kj} e_{th} = g_{jh}$, $g^{ki} H_{kh} H_{jt} = N_{jh}$, 就得到

$$-K g_{jh} = N_{jh} - 2H H_{jh},$$

或

$$K g_{jh} - 2H H_{jh} + N_{jh} = 0.$$

这是联系第一、第二、第三基本形式的一个关系式。

§ 38 測地綫

在曲面上給出曲綫 $u^i = u^i(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$), 其长 s 由下式确定

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ii} \frac{du^i}{dt} \frac{du^i}{dt}} dt.$$

連結曲面上两定点 P, Q 的所有曲面曲綫中, 使以上积分之值为极小的曲綫叫做曲面上的測地綫。如以

$$s = \int_{t_0}^{t_1} F(u, \dot{u}) dt, \quad F(u, \dot{u}) = \sqrt{g_{ii}(u) \dot{u}^i \dot{u}^i}, \quad \dot{u}^i = \frac{\partial u^i}{\partial t},$$

則表示它的微分方程由 Euler 微分方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{u}^a} \right) - \frac{\partial F}{\partial u^a} = 0$$

所給定。但由于

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{u}^a} = \frac{1}{F} g_{ia} \dot{u}^i, \quad \frac{\partial F}{\partial u^a} = \frac{1}{2F} (\partial_a g_{ij}) \dot{u}^i \dot{u}^j,$$

故 Euler 微分方程可写成

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{F} g_{ia} \dot{u}^i \right) - \frac{1}{2F} (\partial_a g_{ij}) \dot{u}^i \dot{u}^j = 0,$$

$$\frac{1}{F} g_{ia} \ddot{u}^i + \frac{1}{F} (\partial_j g_{ia}) \dot{u}^j \dot{u}^i - \frac{1}{2F} (\partial_a g_{ij}) \dot{u}^i \dot{u}^j - \frac{\frac{dF}{dt}}{F^2} g_{ia} \dot{u}^i = 0,$$

$$g_{ia} \ddot{u}^i + \frac{1}{2} (\partial_j g_{ia} + \partial_i g_{ja} - \partial_a g_{ji}) \dot{u}^j \dot{u}^i - \frac{\frac{dF}{dt}}{F} g_{ia} \dot{u}^i = 0.$$

这式的两边乘以 g^{ia} , 再关于 a 总和起来, 利用 Christoffel 記号, 則得

$$\frac{d^2 u^h}{dt^2} + \left\{ \begin{matrix} h \\ ji \end{matrix} \right\} \frac{du^j}{dt} \frac{du^i}{dt} - \frac{\frac{dF}{dt}}{F} \frac{du^h}{dt} = 0.$$

但因 $F = \frac{ds}{dt}$ 或 $F = \frac{1}{\frac{dt}{ds}}$, 所以

$$\frac{\frac{dF}{dt}}{F} = - \frac{\frac{d^2 t}{ds^2}}{\left(\frac{dt}{ds} \right)^2}.$$

把它代入上式, 得出

$$\frac{d^2 u^h}{dt^2} + \left\{ \begin{matrix} h \\ ji \end{matrix} \right\} \frac{du^j}{dt} \frac{du^i}{dt} + \frac{\frac{d^2 t}{ds^2}}{\left(\frac{dt}{ds} \right)^2} \frac{du^h}{dt} = 0,$$

$$\frac{d^2 u^h}{dt^2} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \frac{du^h}{dt} \frac{d^2 t}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} h \\ ji \end{matrix} \right\} \frac{du^j}{dt} \frac{du^i}{dt} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 = 0,$$

$$\frac{d^2 u^h}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} h \\ ji \end{matrix} \right\} \frac{du^j}{ds} \frac{du^i}{ds} = 0.$$

这个式子就是曲面上测地线的微分方程。

§ 39 Meusnier 定理

設曲面上給定一曲線 $u^h = u^h(s)$, 表示曲面上点的位置向量 \mathbf{X} 有形式 $\mathbf{X} = \mathbf{X}(u(s))$, 因此它也是 s 的函数。将这个函数对 s 繼續二次微分, 有

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{X}}{ds} &= \frac{du^h}{ds} \mathbf{X}_h, \\ \frac{d^2\mathbf{X}}{ds^2} &= \left(\frac{d^2u^h}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} h \\ ji \end{matrix} \right\} \frac{du^j}{ds} \frac{du^i}{ds} \right) \mathbf{X}_h + H_{jn} \frac{du^j}{ds} \frac{du^i}{ds} \mathbf{N}. \end{aligned} \quad (39.1)$$

这里的 $\frac{d^2\mathbf{X}}{ds^2}$ 是当这条曲线看成空间曲线时, 以主法线的方向为方向, 其长等于 k 的一个向量, 这向量在法线方向的支量即

$$H_{jn} \frac{du^j}{ds} \frac{du^i}{ds} \mathbf{N}$$

称做是这条曲线的法曲率向量, 其长

$$k_n = H_{jn} \frac{du^j}{ds} \frac{du^i}{ds}$$

叫做法曲率。

对于曲面上的测地线, 由 (39.1) 得出

$$\frac{d^2\mathbf{X}}{ds^2} = H_{jn} \frac{du^j}{ds} \frac{du^i}{ds} \mathbf{N}. \quad (39.2)$$

这里如 $H_{jn} \frac{du^j}{ds} \frac{du^i}{ds} = 0$, 那么, 这条曲线是直线。如

$$H_{jn} \frac{du^j}{ds} \frac{du^i}{ds} \neq 0,$$

这条曲线的曲率向量垂直于曲面。

反之, 如曲面上的曲线是直线, 或者其曲率向量垂直于曲面时, 则这曲线一定是测地线。因此, 有如下的定理。

定理 曲面上的曲綫是測地綫的必要与充分条件是：它或为直綫，或其曲率向量垂直于曲面。

曲率向量垂直于曲面这一事实也可說成是曲面法綫包含于密切平面內。

以上我們提到对于曲面上的測地綫，式(39.2)成立，这式右边的法曲率向量其实只单独由曲綫的切綫方向 $\frac{du^h}{ds}$ 所决定。因此，以下定理成立。

定理 曲面曲綫在一点的法曲率向量等于在这一点和这曲綫相切的測地綫之法曲率向量。

平面上的測地綫常是直綫，因此， $H_{ji}=0$ 。反之，如 $H_{ji}=0$ ，則其上之測地綫常是直綫，因而曲面成为平面了。于是，得到下一定理。

定理 曲面成为平面的必要充分条件是 $H_{ji}=0$ 。

因为对于平面有 $H_{ji}=0$ ，所以由 Gauss 方程

$$K_{kji}^{\dots h} = H_k^{\dots h} H_{ji} - H_j^{\dots h} H_{ki}$$

即知这时 $K_{kji}^{\dots h}=0$ ，于是有

定理 对于平面有 $K_{kji}^{\dots h}=0$ 。

反之，假設我們所要討論的曲面滿足 $K_{kji}^{\dots h}=0$ 。

应用和前章完全同样的方法，可以証明当曲綫坐标有变换

$$u^{h'} = f^{h'}(u^1, u^2)$$

时，Christoffel 記号 $\left\{ \begin{smallmatrix} h \\ ji \end{smallmatrix} \right\}$ 的变换法則是

$$A_k^{h'} \left\{ \begin{smallmatrix} h \\ ji \end{smallmatrix} \right\} = A_j^{i'} A_i^{h'} \left\{ \begin{smallmatrix} h' \\ j' i' \end{smallmatrix} \right\} + \partial_i A_i^{h'} (A_i^{h'} = \partial_i f^{h'}),$$

我們对这里以 $\left\{ \begin{smallmatrix} h' \\ j' i' \end{smallmatrix} \right\} = 0$ 而得到的方程

$$\frac{\partial^2 u^{h'}}{\partial u^j \partial u^i} = \left\{ \begin{smallmatrix} h \\ ji \end{smallmatrix} \right\} \frac{\partial u^{h'}}{\partial u^h} \quad (39.3)$$

加以討論。把这式看做是关于 u^h 的偏微分方程, 它的完全可积条件是

$$\partial_k \left\{ \frac{h}{ji} \right\} - \partial_j \left\{ \frac{h}{ki} \right\} + \left\{ \frac{h}{ka} \right\} \left\{ \frac{a}{ji} \right\} - \left\{ \frac{h}{ja} \right\} \left\{ \frac{a}{ki} \right\} = 0,$$

如 $K_{kji}^h = 0$, 这个条件是满足的。

因此, 如 $K_{kji}^h = 0$, 則使 (39.3) 成立的变数 $u^h = f^h(u^1, u^2)$ 是存在的, 也就是說, 在坐标系 (u^h) 之下, $\left\{ \frac{h'}{j'i'} \right\} = 0$ 是成立的。但因

$$\frac{\partial g_{j'v}}{\partial u^{k'}} = \left\{ \frac{a'}{k'j'} \right\} g_{a'v} + \left\{ \frac{a'}{k'i'} \right\} g_{j'a'} = 0,$$

所以在这种坐标系下, $g_{j'v}$ = 常数, 因而, $ds^2 = g_{j'v} du^{j'} du^{v'}$ 和平面上的綫素一致, 于是作为討論对象的曲面是可展曲面。

反之, 对于可展曲面, 容易知道有 $K_{kji}^h = 0$, 因此, 有定理如下。

定理 曲面成为可展的必要充分条件是 $K_{kji}^h = 0$ (或 $K = 0$)。

在方程

$$\frac{d^3 \mathbf{X}}{ds^3} = \left(\frac{d^2 u^h}{ds^2} + \left\{ \frac{h}{ji} \right\} \frac{du^j}{ds} \frac{du^i}{ds} \right) \mathbf{X}_h + H_n \frac{du^j}{ds} \frac{du^i}{ds} \mathbf{N} \quad (39.4)$$

里, $\frac{d^2 \mathbf{X}}{ds^2}$ 的长是曲綫的曲率 k , $\left(\frac{d^2 u^h}{ds^2} + \left\{ \frac{h}{ji} \right\} \frac{du^j}{ds} \frac{du^i}{ds} \right) \mathbf{X}_h$ 之长是測地曲率 k_g , $H_n \frac{du^j}{ds} \frac{du^i}{ds}$ 是法曲率 k_n , 它們之間有关系

$$k^2 = k_g^2 + k_n^2.$$

因为 $\frac{d^3 \mathbf{X}}{ds^3} = k \mathbf{n}$, 如 \mathbf{n} 和 \mathbf{N} 所成的角, 亦即曲面曲綫的主法綫和曲面法綫所成之角为 θ , 則由 (39.4) 即得

$$k_n = k \cos \theta.$$

因此, 有以下的 Meusnier 定理。

定理 曲面曲綫的曲率 k , 法曲率 k_n , 主法綫和曲面法綫所成的角 θ 間有关系 $k_n = k \cos \theta$ 。

§ 40 曲 率 綫

由于在曲面一点处沿 dw^h 方向的曲綫法曲率是由

$$k_n = \frac{H_{\mu} dw^{\mu} dw^h}{g_{\mu h} dw^{\mu} dw^h}$$

所給定的, 所以决定 k_n 的极值 $\frac{1}{R}$ 的方向非满足

$$\left(H_{\mu} - \frac{1}{R} g_{\mu h} \right) dw^h = 0$$

不可。满足这一条件的方向我們称之为**主方向**, 由主方向决定的法曲率称为**主曲率**。如果

$$H_{\mu} = \frac{1}{R} g_{\mu h},$$

則主方向是不定的, 主方向不定的点叫做**臍点**(umbilic)。

不同的主曲率 $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$ 所对应的主方向 設为 $d_1 u^h$, $d_2 u^h$, 則

由于

$$\left(H_{\mu} - \frac{1}{R_1} g_{\mu h} \right) d_1 u^h = 0, \quad \left(H_{\mu} - \frac{1}{R_2} g_{\mu h} \right) d_2 u^h = 0,$$

而有

$$\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) g_{\mu h} d_2 u^h d_1 u^h = 0,$$

这也就是

$$g_{\mu h} d_2 u^h d_1 u^h = 0.$$

这式子的意义是对应于不同主曲率的两个主方向是正交的。由上面的式子又得到

$$H_{\mu h} d_2 u^h d_1 u^h = 0.$$

設以这样的主方向为方向的两个单位向量为 v_1^h , v_2^h , 則有

$$g_{\mu h} v_1^h v_2^h = 0, \quad H_{\mu h} v_1^h v_2^h = 0,$$

而任意的单位向量 v^h 可写做

$$v^h = v_1^h \cos \theta + v_2^h \sin \theta,$$

这里的 θ 是 v^h 和 v_1^h 所成的角。由于对应于方向 v^h 的法曲率是由 $\frac{1}{R} = H_{\mu} v^j v^i$ 給定的, 所以

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= H_{\mu} v^j v^i = H_{\mu} (v_1^j \cos \theta + v_2^j \sin \theta) (v_1^i \cos \theta + v_2^i \sin \theta) \\ &= (H_{\mu} v_1^j v_1^i) \cos^2 \theta + (H_{\mu} v_2^j v_2^i) \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

由此就得出

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \theta}{R_1} + \frac{\sin^2 \theta}{R_2}.$$

这就是所谓的 Euler 公式。

沿着主方向的曲綫, 也就是說滿足

$$\left(H_{\mu} - \frac{1}{R} g_{\mu} \right) \frac{dw^{\mu}}{ds} = 0$$

的曲綫称为曲率綫。

上式又可写成

$$H_j^{\lambda} \frac{dw^j}{ds} = \frac{1}{R} \frac{dw^{\lambda}}{ds}.$$

另一方面, 在 Weingarten 方程

$$\partial_j N = -H_j^{\lambda} X_{\lambda}$$

的两边各乘以 $\frac{dw^j}{ds}$, 再对指标 j 进行縮約, 則

$$\frac{dN}{ds} = -H_j^{\lambda} \frac{dw^j}{ds} X_{\lambda} = -\frac{1}{R} \frac{dw^{\lambda}}{ds} X_{\lambda} = -\frac{1}{R} \frac{dX}{ds},$$

因此, 对于曲率綫, 就有下式成立

$$\frac{dN}{ds} + \frac{1}{R} \frac{dX}{ds} = 0.$$

这一式叫做 Rodrigues 公式。

§ 41 漸 近 曲 綫

曲面上滿足

$$H_{ij}d_2u^j d_1u^i = 0$$

的两个方向 d_1u^h 与 d_2u^h 称做是互为共轭的方向。特别是那个和本身共轭的方向,即滿足

$$H_{ji}du^j du^i = 0$$

的方向叫做漸近方向。沿着漸近方向的曲綫,即滿足

$$H_{ji} \frac{du^j}{ds} \frac{du^i}{ds} = 0$$

的曲綫叫做漸近曲綫。

对于漸近曲綫,公式(39.4), 即

$$\frac{d^2 \mathbf{X}}{ds^2} = \left(\frac{d^2 u^h}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} h \\ ji \end{matrix} \right\} \frac{du^j}{ds} \frac{du^i}{ds} \right) \mathbf{X}_h + H_{ji} \frac{du^j}{ds} \frac{du^i}{ds} \mathbf{N}$$

可写成

$$\frac{d^2 \mathbf{X}}{ds^2} = \left(\frac{d^2 u^h}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} h \\ ji \end{matrix} \right\} \frac{du^j}{ds} \frac{du^i}{ds} \right) \mathbf{X}_h.$$

比較这个式子两边的向量之长,即有

$$k = k_g,$$

因此,有

定理 漸近曲綫的曲率等于測地曲率。

再者,上面的式子表示出曲綫的主法綫和曲面相切,因此有

定理 漸近曲綫的密切平面与曲面的切平面一致。

从此推知漸近曲綫的副法綫与曲面法綫一致,那就是

$$\mathbf{b} = \pm \mathbf{N}.$$

对这个等式沿着曲綫微分,則有

$$-\tau \mathbf{n} = \pm (\partial_j \mathbf{N}) \frac{du^j}{ds} = \mp H_{ji} \frac{du^j}{ds} \mathbf{X}_h,$$

比較兩邊向量之長的平方,得

$$(\tau)^2 = H_j^b H_i^a g_{ba} \frac{du^j}{ds} \frac{du^i}{ds} = N_\mu \frac{du^\mu}{ds} \frac{du^\mu}{ds}.$$

但由於

$$K g_\mu - 2H H_\mu + N_\mu = 0,$$

所以

$$K - 2H H_\mu \frac{du^\mu}{ds} \frac{du^\mu}{ds} + N_\mu \frac{du^\mu}{ds} \frac{du^\mu}{ds} = 0.$$

因此,對於漸近曲綫有

$$(\tau^2) = -K,$$

這也就是

$$\tau = \pm \sqrt{-K},$$

于是有如下的定理。

定理 漸近曲綫的撓率等於 $\pm \sqrt{-K}$ 。

這叫做 **Enneper 定理**。

第 9 章 Riemann 空間

§ 42 Riemann 空間

上面提到的曲面是二維 Riemann 空間的一个例。至于一般 n 維 Riemann 空間,我們將按照下述的方式来給以定义。

首先,把空間考虑为元素的集,其中有子集 U, V, W, \dots , 由这些子集所成的集假設滿足如下的条件:

(i) 对于空間的任意一元素 p , 在集中至少有这样一个子集 U , 使 $p \in U$ (p 含于 U 內)。

(ii) 对于空間的任意两个不同的元素 p 与 q , 在集中有这样一个子集 U , 使 $p \in U$ 但 $q \notin U$ (q 不含于 U 內)。

(iii) 如有两个子集 U 与 V 包含元素 p , 則被包含于 U, V 的共同部分而又包含 p 的子集 W 在这集中存在。

滿足这些条件的空間叫做拓扑空間, 在这样定义的拓扑空間中, 那些包含各点的子集称为各点的邻域。这些邻域复盖着拓扑空間。

如果一个拓扑空間为某一个邻域所成的集所复盖着, 假設每一个邻域和 n 維 Euclid 空間的球內部做成 1 对 1、双連續的点对应, 那么, 邻域內的每一个点对应于 Euclid 空間球內的点, 因此邻域內的每一个点对应于其在 Euclid 空間球內对应点的坐标 (u^1, u^2, \dots, u^n) 。这时, 我們說对于这个拓扑空間导进了坐标系, 有坐标的邻域称做坐标邻域。假使拓扑空間內一个点被两个坐标邻域复盖着, 也就是說, 这个点同时属于两个坐标邻域, 那么, 对于同一点当然有 Euclid 空間內两个坐标系 (u^k) 与 (u^k') 和它对应着。

在这情况下, 如 u^h 与 $u^{h'}$ 常为 C^r 級 (即 r 次可微, 且第 r 次的偏微分是連續的) 的函数, 而且它們之間有函数行列式不等于 0, 即

$$u^{h'} = f^{h'}(u^1, u^2, \dots, u^n), \quad \left| \frac{\partial f^{h'}}{\partial u^h} \right| \neq 0 \quad (42.1)$$

的函数关系联系着, 这时称这个拓扑空間是 C^r 級的 n 維流形 (n -dimensional manifold of class C^r)。

在 C^r 級的 n 維流形中, 每个坐标邻域內設有兩点 $P(u^h)$ 与 $P'(u^h + du^h)$, 它們的距离是一个数量 ds , 这个数量 ds 是以 C^{r-1} 級的函数 $g_{jh}(u)$ 为系数、坐标微分 du^h 的正值二次形式

$$ds^2 = g_{jh}(u) du^j du^h$$

所定义的, 这时, 这个 C^r 級的 n 維流形称为 C^r 級的 n 維 Riemann 空間, 上举的那个二次形式叫做基本度量二次形式 (fundamental metric quadratic form)。

§ 43 向 量

Riemann 空間內关于数量、向量、張量等的定义可仿照以前累次提到的那样来規定。

(1) 数量: 它是一个量, 在各个坐标系下, 它以一个数来表示, 如关于坐标系 (u^h) , $(u^{h'})$ 的数分別記以 f , f' , 它們之間常以

$$f' = f$$

这样的关系結合着, 这样一个量叫做数量。这时, f 与 f' 称做它关于坐标系 (u^h) 与 $(u^{h'})$ 的支量。数量的支量在空間內各点都已規定时, 它就称为一个数量場。

定义 Riemann 空間度量的 ds 就是一个数量。

(2) 向量: 它是一个量, 在各个坐标系下, 它以 n 个数来表示, 如关于坐标系 (u^h) , $(u^{h'})$ 的数分別以 v^h , $v^{h'}$ 表示, 它們之間常以

$$v^{h'} = A_{h'}^{h'} v^h \quad (A_{h'}^{h'} = \partial_{h'} u^{h'})$$

这样的关系結合时,称它是一个逆变向量。这时, v^h 与 $v^{h'}$ 称为这个逆变向量关于坐标系 (u^h) 与 $(u^{h'})$ 的支量。逆变向量的支量在空間內各点都已規定时,它就称为一个逆变向量場。

坐标的微分 du^h 就是一个逆变向量。

还有,一个量在各个坐标系下,以 n 个数来表示,如关于坐标系 (u^h) , $(u^{h'})$ 的数分別以 w_i , $w_{i'}$ 表示,它們之間常以

$$w_{i'} = A_{i'}^i w_i \quad (A_{i'}^i = \partial_{i'} u^i)$$

这样的关系結合时,称它是一个协变向量。这时, w_i 与 $w_{i'}$ 称为这个协变向量关于坐标系 (u^h) 与 $(u^{h'})$ 的支量。协变向量的支量在空間內各点都已規定时,它就称为一个协变向量場。

数量場 $f(u)$ 的偏微分 $\partial_i f$ 就是一个协变向量場。

§ 44 張 量

它是一个量,在各个坐标系下,例如說以 n^2 个数来表示,如关于坐标系 (u^h) , $(u^{h'})$ 的数分別以 $T_{j' i'}^{h'}$, $T_{j i}^h$ 表示,它們之間常以

$$T_{j' i'}^{h'} = A_{j'}^j A_{i'}^i A_h^{h'} T_{j i}^h$$

这样的关系結合时,称它是逆变一阶、协变二阶的張量。这时, $T_{j i}^h$ 与 $T_{j' i'}^{h'}$ 称为这个張量关于坐标系 (u^h) 与 $(u^{h'})$ 的支量。張量的支量在空間內各点都已規定时,它就叫做一个張量場。

协变 0 阶的張量是逆变張量,逆变 0 阶的張量是协变張量。

基本二次形式的系数 g_{ji} 是一个协变張量的支量。

張量 $T_{j i}^h$ 如满足条件

$$T_{j i}^h = T_{i j}^h$$

时,則称它关于 j, i 是对称的,如满足

$$T_{j i}^h = -T_{i j}^h$$

时,則称它关于 j, i 是反称的。

对于張量,可規定如次的运算。

(1) 加法: 对于同类的張量,例如 $R_{ji}^{\cdot\cdot h}$ 与 $S_{ji}^{\cdot\cdot h}$, 以对应支量之和作为支量的張量,即

$$R_{ji}^{\cdot\cdot h} + S_{ji}^{\cdot\cdot h} = T_{ji}^{\cdot\cdot h}$$

称为 $R_{ji}^{\cdot\cdot h}$ 与 $S_{ji}^{\cdot\cdot h}$ 之和。

(2) 減法: 和以上同样地可規定同类的两个張量之差。

(3) 乘法: 对于两个張量,例如 R_{kj} 与 $S_i^{\cdot\cdot h}$, 以其支量之积

$$R_{kj}S_i^{\cdot\cdot h} = T_{kji}^{\cdot\cdot h}$$

作为支量的張量称为这两个張量之积。

(4) 縮約: 对于一个張量,例如 $R_{ki}^{\cdot\cdot h}$, 使它的逆变指标 h 和一个协变指标 k 相等,因而总和起来

$$R_{ai}^{\cdot\cdot a} = R_{ii},$$

以这样的 R_{ii} 作为支量的張量,这项操作称为 $R_{ki}^{\cdot\cdot h}$ 关于 h 与 k 的縮約。

設 v^h 是一个逆变向量,則

$$g_{ji}v^jv^i$$

是一个正的数量,以它定义逆变向量 v^h 之长的平方。再設 v^h 与 w^h 是两个逆变向量,則

$$g_{ji}v^jw^i$$

是一个数量,以它定义两个逆变向量 v^h 与 w^h 的内积。又因为

$$\frac{g_{ji}v^jw^i}{\sqrt{g_{ji}v^jv^i}\sqrt{g_{ji}w^jw^i}}$$

的絕對值不超过 1, 所以把它拿来定义这两个向量的交角 θ 之余弦 $\cos \theta$ 。

現以

$$g_{ji}v^j = v_i, \quad g_{ji}w^j = w_i,$$

則 v_i 与 w_i 都是协变向量,它們的长与内积可写成

$$g_{ji}v^jv^i = v_iv^i, \quad g_{ji}v^jw^i = v_iw^i.$$

还有,例如由張量 $T_{ji}^{\dots h}$ 可規定

$$T_{jka} = T_{ji}^{\dots a} g_{ak}, \quad T_j^{\dots k} = T_{ja}^{\dots k} g^{ak},$$

以这种方式从一个張量定出另外的張量,称它們是互为相伴的張量。

§ 45 Levi-Civita 平行性

在三維 Euclid 空間中的曲面上,考虑点 X 的切綫向量 $v = v^h X_h$, 如前所述,它的微分是

$$dv = \left(dv^h + \left\{ \begin{smallmatrix} h \\ ji \end{smallmatrix} \right\} du^j v^i \right) X_h + H_{ji} du^j v^i N,$$

作向量 $v + dv$ 在点 X 的切平面上的垂直射影,則有

$$v + \left(dv^h + \left\{ \begin{smallmatrix} h \\ ji \end{smallmatrix} \right\} du^j v^i \right) X_h.$$

因此,如

$$\delta v^h = dv^h + \left\{ \begin{smallmatrix} h \\ ji \end{smallmatrix} \right\} du^j v^i = 0$$

时,則这个垂直射影和原来的向量 v 成为平行。

切于曲面的向量 $v^h X_h$ 与 $v^h X_h + d(v^h X_h)$ 滿足上式时,則称它們在曲面上平行。这样定义的平行称为 **Levi-Civita 平行性**。

把这项概念扩充,在 Riemann 空間內就可以象下面那样地来定义向量与張量的协变微分与协变导数。

对于数量 f , 逆变向量 v^h , 协变向量 w_i , 張量 $T_{ji}^{\dots h}$, 分別称

$$\delta f = df,$$

$$\delta v^h = dv^h + \left\{ \begin{smallmatrix} h \\ ji \end{smallmatrix} \right\} du^j v^i,$$

$$\delta w_i = dw_i - \left\{ \begin{smallmatrix} h \\ ji \end{smallmatrix} \right\} du^j w_h,$$

$$\delta T_{ji}^{\dots h} = dT_{ji}^{\dots h} + \left\{ \begin{smallmatrix} h \\ ka \end{smallmatrix} \right\} du^k T_{ji}^{\dots a} - \left\{ \begin{smallmatrix} a \\ kj \end{smallmatrix} \right\} du^k T_{ai}^{\dots h} - \left\{ \begin{smallmatrix} a \\ ki \end{smallmatrix} \right\} du^k T_{ja}^{\dots h}$$

为它们的协变微分,称

$$\nabla_i f = \partial_i f,$$

$$\nabla_j v^k = \partial_j v^k + \left\{ \begin{matrix} k \\ ji \end{matrix} \right\} v^i,$$

$$\nabla_j w_i = \partial_j w_i - \left\{ \begin{matrix} h \\ ji \end{matrix} \right\} w_h,$$

$$\nabla_k T_{ji}^{\dots h} = \partial_k T_{ji}^{\dots h} + \left\{ \begin{matrix} h \\ ka \end{matrix} \right\} T_{ji}^{\dots a} - \left\{ \begin{matrix} a \\ kj \end{matrix} \right\} T_{ai}^{\dots h} - \left\{ \begin{matrix} a \\ ki \end{matrix} \right\} T_{ja}^{\dots h}$$

是它们的协变导数。

張量的协变微分和原張量是同类的,其协变导数比原張量的协变指标多出一个的張量。

协变微分与协变导数满足普通的微分法则:

$$\delta(S+T) = \delta S + \delta T, \quad \delta(ST) = (\delta S)T + S(\delta T),$$

$$\nabla(S+T) = \nabla S + \nabla T, \quad \nabla(ST) = (\nabla S)T + S(\nabla T),$$

这是很容易验证的。

如果沿某一条曲线,对于張量的协变微分有

$$\frac{\delta T_{ji}^{\dots h}}{dt} = 0,$$

则称这个張量沿曲线是平行的。例如在曲线 $w^h = w^h(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$) 的端点 $w^h(t_0)$ 这个地方,给定一个向量 v_0^h , 在初值条件: $t = t_0$ 和 $v^h = v_0^h$ 之下,解出微分方程

$$\frac{\delta v^h}{dt} = \frac{dv^h}{dt} + \left\{ \begin{matrix} h \\ ji \end{matrix} \right\} \frac{dw^j}{dt} v^i = 0,$$

设其解为 $v^h(t)$, 则 $v^h(t)$ 是在点 $w^h(t_0)$ 处的向量 v_0^h 沿着曲线平行移动而得到的。

基本張量 g_{jk} 的协变导数为

$$\nabla_k g_{jk} = \partial_k g_{jk} - \left\{ \begin{matrix} a \\ kj \end{matrix} \right\} g_{ak} - \left\{ \begin{matrix} a \\ ki \end{matrix} \right\} g_{ja} = 0,$$

所以基本張量对协变微分而论是一个常量。

因此,当向量 v^h 平行移动时,有

$$\begin{aligned} d(g_{jk}v^jv^k) &= \delta(g_{jk}v^jv^k) \\ &= (\delta g_{jk})v^jv^k + g_{jk}(\delta v^j)v^k + g_{jk}v^j(\delta v^k) = 0, \end{aligned}$$

这就是說向量之长在平行移动时保持不变。

当两个向量 v^h 与 w^h 同时平行移动时,对于它們的交角有

$$\begin{aligned} \delta(\cos \theta) &= \delta\left(\frac{g_{jk}v^jw^k}{v \cdot w}\right) \\ &= \frac{1}{v \cdot w} [(\delta g_{jk})v^jw^k + g_{jk}(\delta v^j)w^k + g_{jk}v^j(\delta w^k)] = 0, \end{aligned}$$

这就是說两向量的交角在它們平行移动时保持不变。

Riemann 空間內的測地綫和曲面上的測地綫,其情况完全一样,由微分方程

$$\frac{d^2u^h}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} h \\ ji \end{matrix} \right\} \frac{du^j}{ds} \frac{du^i}{ds} = 0$$

所确定,这个式子表示測地綫的切綫 $\frac{du^h}{ds}$ 是沿着測地綫按 Levi-Civita 意义作平行移动的。

§ 46 曲率張量

协变微分的运算一般說来是不能交換的。实际上,如以 $\nabla_k \nabla_j - \nabla_j \nabla_k$ 这样形式的运算施于数量、向量、張量时,則有

$$\begin{aligned} \nabla_k \nabla_j f - \nabla_j \nabla_k f &= 0, \\ \nabla_k \nabla_j v^h - \nabla_j \nabla_k v^h &= K_{kji}^{\dots h} v^i, \\ \nabla_k \nabla_j w_i - \nabla_j \nabla_k w_i &= -K_{kji}^{\dots h} w_h, \\ \nabla_l \nabla_k T_{ji}^{\dots h} - \nabla_k \nabla_l T_{ji}^{\dots h} &= K_{ika}^{\dots h} T_{ji}^{\dots a} - K_{ikj}^{\dots a} T_{ai}^{\dots h} - K_{ika}^{\dots a} T_{ja}^{\dots h}. \end{aligned}$$

这里的

$$K_{kji}^{\dots h} = \partial_k \left\{ \begin{matrix} h \\ ji \end{matrix} \right\} - \partial_j \left\{ \begin{matrix} h \\ ki \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} h \\ ka \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} a \\ ji \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} h \\ ja \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} a \\ ki \end{matrix} \right\}$$

称为 Riemann-Christoffel 曲率張量。上面所举的那些式子叫

做 Ricci 公式。和曲面的情况一样, $K_{kjh}^{\cdot\cdot\cdot h} = 0$ 的空间从局部看来是 Euclid 空间。

曲率張量满足

$$K_{kjh}^{\cdot\cdot\cdot h} = -K_{jkh}^{\cdot\cdot\cdot h}, \quad K_{kjh}^{\cdot\cdot\cdot h} + K_{jkh}^{\cdot\cdot\cdot h} + K_{ihj}^{\cdot\cdot\cdot h} = 0,$$

这可从曲率張量的定义看出。对于 g_{th} , 应用 Ricci 公式, 就有

$$0 = \nabla_k \nabla_j g_{th} - \nabla_j \nabla_k g_{th} = -K_{kjh}^{\cdot\cdot\cdot a} g_{ah} - K_{kjh}^{\cdot\cdot\cdot a} g_{ta},$$

因此, 如以

$$K_{kjh} = K_{kjh}^{\cdot\cdot\cdot a} g_{ah},$$

则得

$$K_{kjh} = -K_{kjh},$$

及

$$K_{kjh} + K_{jkh} + K_{ihj} = 0.$$

对 K_{kjh} 进行实际计算, 则

$$\begin{aligned} K_{kjh} = & \frac{1}{2} (\partial_k \partial_i g_{th} + \partial_j \partial_h g_{ki} - \partial_k \partial_h g_{ji} - \partial_j \partial_i g_{kh}) \\ & - g_{ta} \left(\left\{ \begin{matrix} b \\ kh \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} a \\ ji \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} b \\ ki \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} a \\ jh \end{matrix} \right\} \right), \end{aligned}$$

从这里看出, K_{kjh} 非满足

$$K_{kjh} = K_{thkj}$$

不可。

因为 $K_{kjh}^{\cdot\cdot\cdot h}$ 是張量, 可关于 h 与 k 进行缩约而得

$$K_{jh} = K_{ajh}^{\cdot\cdot\cdot a},$$

称为 Ricci 張量; 再以 g^h 乘 K_{jh} , 然后进行缩约, 得

$$K = g^h K_{jh},$$

称做曲率数量。以 g^{kh} 乘关系式 $K_{kjh} + K_{jkh} + K_{ihj} = 0$ 之后再行缩约, 如注意到

$$g^{kh} K_{jkh} = 0, \quad g^{kh} K_{ikh} = -g^{kh} K_{kjh} = -K_{ij},$$

則有

$$K_{ji} = K_{ij},$$

亦即 Ricci 張量是对称的。Ricci 張量滿足

$$K_{ji} = \frac{1}{n} K g_{ji}$$

的空間称做 Einstein 空間。

以 Ricci 公式应用于任意协变向量場 w_i 的协变导数 $\nabla_j w_i$, 更对指标作适当調換, 則得

$$\nabla_i \nabla_k \nabla_j w_i - \nabla_k \nabla_l \nabla_j w_l = -K_{ikj}^{\dots a} \nabla_a w_i - K_{ikl}^{\dots a} \nabla_j w_a,$$

$$\nabla_k \nabla_j \nabla_l w_i - \nabla_j \nabla_k \nabla_l w_i = -K_{kji}^{\dots a} \nabla_a w_i - K_{kjl}^{\dots a} \nabla_l w_a,$$

$$\nabla_j \nabla_l \nabla_k w_i - \nabla_l \nabla_j \nabla_k w_i = -K_{jlk}^{\dots a} \nabla_a w_i - K_{jli}^{\dots a} \nabla_k w_a.$$

另一方面, 对于 Ricci 公式 $\nabla_k \nabla_j w_i - \nabla_j \nabla_k w_i = -K_{kji}^{\dots a} w_a$, 施以运算子 ∇_l , 更对指标作适当調換, 則得

$$\nabla_l \nabla_k \nabla_j w_i - \nabla_l \nabla_j \nabla_k w_i = -(\nabla_l K_{kji}^{\dots a}) w_a - K_{kji}^{\dots a} \nabla_l w_a,$$

$$\nabla_k \nabla_j \nabla_l w_i - \nabla_k \nabla_l \nabla_j w_i = -(\nabla_k K_{jli}^{\dots a}) w_a - K_{jli}^{\dots a} \nabla_k w_a,$$

$$\nabla_j \nabla_l \nabla_k w_i - \nabla_j \nabla_k \nabla_l w_i = -(\nabla_j K_{lik}^{\dots a}) w_a - K_{lik}^{\dots a} \nabla_j w_a.$$

从前面三式之和减去后面三式之和, 得到

$$(\nabla_l K_{kji}^{\dots a} + \nabla_k K_{jli}^{\dots a} - \nabla_j K_{lik}^{\dots a}) w_a = 0,$$

但因 w_a 是任意的, 所以得到

$$\nabla_l K_{kji}^{\dots a} + \nabla_k K_{jli}^{\dots a} - \nabla_j K_{lik}^{\dots a} = 0,$$

这式称为 Bianchi 恒等式。

在这恒等式里以 $a=l$ 再进行縮約, 則有

$$\nabla_a K_{kji}^{\dots a} - \nabla_k K_{ji} + \nabla_j K_{ki} = 0.$$

以 g^k 乘这个式子后再进行縮約, 如注意到 $g^k K_{kji}^{\dots a} = K_j^{\dots a} (=K_{kj} g^{ja})$, 則

$$2\nabla_a K_j^{\dots a} - \nabla_k K = 0. \quad (46.1)$$

因面有

$$\nabla_a \left(K_i^a - \frac{1}{2} K \delta_i^a \right) = 0.$$

这个式子在相对論里起着重要的作用。

对于在空間内一点 P 的两个綫性无关向量 v^k 与 w^k , 作

$$k = \frac{-K_{kjm} v^k w^j v^i w^i}{(g_{kb} g_{jm} - g_{jm} g_{kb}) v^k w^j v^i w^i},$$

这称为对 v^k, w^k 所确定的平面的截綫曲率。在点 P 和这个平面相切的测地綫之集組成一个曲面, 刚才定义的那个曲率就是这个曲面在点 P 的 Gauss 曲率。

如果对于任何一条截綫, 以上所定的 k 是定值时, 則 K_{kjm} 有形式

$$K_{kjm} = -k (g_{kb} g_{jm} - g_{jm} g_{kb}).$$

計算 k , 得到 $-k = \frac{K}{n(n-1)}$, 因此, 上式可写成

$$K_{kjm} = \frac{K}{n(n-1)} (g_{kb} g_{jm} - g_{jm} g_{kb}).$$

这样的空間称为常曲率空間。

由最后一个式子又得到

$$K_{jk} = \frac{K}{n} g_{jk},$$

所以常曲率空間是 Einstein 空間。

对于 Einstein 空間, 把上式代进 (46.1) 里去, 得到

$$\nabla_k K = 0.$$

因此, K 是定量。

§ 47 Lie 微分^①

現在来討論把 Riemann 空間内一点 (u^k) 移至附近一点 (v^k)

① 这一节是关于 Lie 微分的极概括叙述, 詳細情况見著者的书, The Theory of Lie Derivatives and its Applications. — 譯者注

$= (u^h + \xi^h(u) dt)$ 去的无限小变换

$$'u^h = u^h + \xi^h(u) dt. \quad (47.1)$$

在这变换下,使 Riemann 度量 $ds^2 = g_{\mu\nu}(u) du^\mu du^\nu$ 不变的条件是

$$g_{\mu\nu}(u) du^\mu du^\nu = g_{\mu\nu}(u + \xi dt) (du^\mu + d\xi^\mu dt) (du^\nu + d\xi^\nu dt),$$

因此,只考虑到 dt 的一次项时,所得条件是

$$\xi^k \partial_k g_{\mu\nu} + (\partial_j \xi^\alpha) g_{\alpha\mu} + (\partial_i \xi^\alpha) g_{j\alpha} = 0.$$

这样的无限小变换叫做无限小运动。如果空間内容許无限小运动时,假設取这样的坐标系使 $\xi^h = \delta_1^h$, 从上式有 $\partial_1 g_{\mu\nu} = 0$, 这就是說 $g_{\mu\nu}$ 不含 u^1 , 則空間內其实是容許了有限运动 $'u^h = u^h + \delta_1^h t$.

在上式內用 $\partial_k g_{\mu\nu} = \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ k j \end{smallmatrix} \right\} g_{\alpha\mu} + \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ k i \end{smallmatrix} \right\} g_{j\alpha}$ 代入,經計算后,得到

$$\nabla_j \xi_i + \nabla_i \xi_j = 0 \quad (\xi_j = g_{j\mu} \xi^\mu). \quad (47.2)$$

这个式子叫 Killing 公式。

一般情况下,以支量表示的一个几何量,例如張量 T_{μ}^{ν} 給出时,如有一个无限小变换 (47.1) 使坐标系 (u^h) 通过变换

$$u'^h = u^h + \xi^h(u) dt \quad (47.3)$$

移于坐标系 (u^h) , 則可定义在坐标系 (u^h) 下的支量 $'T_{\mu}^{\nu}$ 等于 $T_{\mu}^{\nu}(u + \xi dt)$ 的張量,即

$$'T_{\mu}^{\nu} = T_{\mu}^{\nu}(u + \xi dt).$$

这个張量在原坐标系 (u^h) 下的支量 $'T_{\mu}^{\nu}$ 由下式給定:

$$'T_{\mu}^{\nu} = (\delta_j^c + \partial_j \xi^c dt)(\delta_i^b + \partial_i \xi^b dt)(\delta_a^h - \partial_a \xi^h dt) T_{cb}^a(u + \xi dt),$$

亦即

$$'T_{\mu}^{\nu} = T_{\mu}^{\nu} + (\xi^k \partial_k T_{\mu}^{\nu} - T_{\mu}^{\alpha} \partial_\alpha \xi^\nu + T_{\alpha i}^{\nu} \partial_j \xi^\alpha + T_{j\alpha}^{\nu} \partial_i \xi^\alpha) dt.$$

这时, $'T_{\mu}^{\nu} - T_{\mu}^{\nu}$ 称为 T_{μ}^{ν} 关于无限小变换 (47.1) 的 Lie 微分。而 $(T_{\mu}^{\nu} - 'T_{\mu}^{\nu})/dt$ 則称为 Lie 导数或单称为 Lie 微分,且以如下的式子表示

$$\mathcal{L} T_{\mu}^{\nu} = \xi^k \partial_k T_{\mu}^{\nu} - T_{\mu}^{\alpha} \partial_\alpha \xi^\nu + T_{\alpha i}^{\nu} \partial_j \xi^\alpha + T_{j\alpha}^{\nu} \partial_i \xi^\alpha. \quad (47.4)$$

这个式子如用协变微分来写, 则有

$$\mathcal{L} T_{ji}^{k} = \xi^k \nabla_i T_{ji}^{k} - T_{ji}^{a} \nabla_i \xi^k + T_{ai}^{k} \nabla_j \xi^a + T_{ja}^{k} \nabla_i \xi^a.$$

如计算基本张量 g_{ji} 的 Lie 微分, 则得

$$\mathcal{L} g_{ji} = \xi^k \nabla_k g_{ji} + g_{ai} \nabla_j \xi^a + g_{ja} \nabla_i \xi^a = \nabla_j \xi_i + \nabla_i \xi_j,$$

如再利用 Killing 公式, 则知这式的右边等于 0, 于是得下面的定理。

定理 无限小变换成为运动的必要与充分条件是基本张量的 Lie 微分等于 0。

为了对于 Christoffel 记号 $\left\{ \begin{smallmatrix} h \\ ji \end{smallmatrix} \right\}$, 适用 Lie 微分的定义, 当施行坐标变换 (47.3) 时, 在坐标系 (u') 下的新记号 $\left\{ \begin{smallmatrix} h' \\ j'i' \end{smallmatrix} \right\}$ 以

$$\left\{ \begin{smallmatrix} h' \\ j'i' \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} h \\ ji \end{smallmatrix} \right\} (u + \xi dt)$$

来定义。这个记号在原坐标系下的支量 $\left\{ \begin{smallmatrix} h \\ ji \end{smallmatrix} \right\}$ 是

$$\left\{ \begin{smallmatrix} h \\ ji \end{smallmatrix} \right\} = (\delta_i^h - \partial_a \xi^h dt) \left[(\delta_j^i + \partial_j \xi^a dt) (\delta_i^b + \partial_i \xi^b dt) \left\{ \begin{smallmatrix} a \\ cb \end{smallmatrix} \right\} (u + \xi dt) + \partial_j \partial_i \xi^a dt \right],$$

亦即

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{smallmatrix} h \\ ji \end{smallmatrix} \right\} &= \left\{ \begin{smallmatrix} h \\ ji \end{smallmatrix} \right\} + \left(\partial_j \partial_i \xi^h + \xi^k \partial_k \left\{ \begin{smallmatrix} h \\ ji \end{smallmatrix} \right\} - \left\{ \begin{smallmatrix} a \\ ji \end{smallmatrix} \right\} \partial_a \xi^h \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \begin{smallmatrix} h \\ ai \end{smallmatrix} \right\} \partial_i \xi^a + \left\{ \begin{smallmatrix} h \\ ja \end{smallmatrix} \right\} \partial_i \xi^a \right) dt. \end{aligned}$$

因此, $\left\{ \begin{smallmatrix} h \\ ji \end{smallmatrix} \right\}$ 的 Lie 微分由下式给定:

$$\mathcal{L} \left\{ \begin{smallmatrix} h \\ ji \end{smallmatrix} \right\} = \partial_j \partial_i \xi^h + \xi^k \partial_k \left\{ \begin{smallmatrix} h \\ ji \end{smallmatrix} \right\} - \left\{ \begin{smallmatrix} a \\ ji \end{smallmatrix} \right\} \partial_a \xi^h + \left\{ \begin{smallmatrix} h \\ ai \end{smallmatrix} \right\} \partial_j \xi^a + \left\{ \begin{smallmatrix} h \\ ja \end{smallmatrix} \right\} \partial_i \xi^a.$$

如用协变微分与曲率张量, 则上式可改写成

$$\mathcal{L}\left\{\begin{smallmatrix} h \\ ji \end{smallmatrix}\right\} = \nabla_j \nabla_i \xi^h + K_{kji}^{\dots h} \xi^k. \quad (47.5)$$

对于空間內的无限小变换(47.1), 空間內任意一条測地綫

$$\frac{d^2 \xi^h}{ds^2} + \left\{\begin{smallmatrix} h \\ ji \end{smallmatrix}\right\} \frac{d\xi^j}{ds} \frac{d\xi^i}{ds} = 0$$

移到另一条測地綫, 使其上的参数 s 受到象

$$s' = as + b \quad (a, b \text{ 是常数, } a \neq 0)$$

这样的仿射变换, 其条件可求得是

$$\mathcal{L}\left\{\begin{smallmatrix} h \\ ji \end{smallmatrix}\right\} = \nabla_j \nabla_i \xi^h + K_{kji}^{\dots h} \xi^k = 0.$$

象这样的无限小变换我們称为无限小仿射的直射变换 (infinitesimal affine collineation)。

g_{ji} 的 Lie 微分和 $\left\{\begin{smallmatrix} h \\ ji \end{smallmatrix}\right\}$ 的 Lie 微分間有关系

$$\mathcal{L}\left\{\begin{smallmatrix} h \\ ji \end{smallmatrix}\right\} = \frac{1}{2} g^{ha} (\nabla_j \mathcal{L} g_{ia} + \nabla_i \mathcal{L} g_{ja} - \nabla_a \mathcal{L} g_{ji}), \quad (47.6)$$

这是可以通过計算来确定的。从上面关于 $\mathcal{L}\left\{\begin{smallmatrix} h \\ ji \end{smallmatrix}\right\}$ 的式子还可确定如下的关系式

$$\nabla_k \mathcal{L}\left\{\begin{smallmatrix} h \\ ji \end{smallmatrix}\right\} - \nabla_j \mathcal{L}\left\{\begin{smallmatrix} h \\ ki \end{smallmatrix}\right\} = \mathcal{L} K_{kji}^{\dots h}. \quad (47.7)$$

运算符 ∇_j 和 \mathcal{L} 交換时, 則有

$$\nabla_j \mathcal{L} v^h - \mathcal{L} \nabla_j v^h = \left(\mathcal{L}\left\{\begin{smallmatrix} h \\ ji \end{smallmatrix}\right\} \right) v^i, \quad (47.8)$$

$$\nabla_j \mathcal{L} w_i - \mathcal{L} \nabla_j w_i = - \left(\mathcal{L}\left\{\begin{smallmatrix} h \\ ji \end{smallmatrix}\right\} \right) w_h; \quad (47.9)$$

$$\begin{aligned} \nabla_k \mathcal{L} T_{ji}^{\dots h} - \mathcal{L} \nabla_k T_{ji}^{\dots h} &= \left(\mathcal{L}\left\{\begin{smallmatrix} h \\ ka \end{smallmatrix}\right\} \right) T_{ji}^{\dots a} \\ &\quad - \left(\mathcal{L}\left\{\begin{smallmatrix} a \\ kj \end{smallmatrix}\right\} \right) T_{ai}^{\dots h} - \left(\mathcal{L}\left\{\begin{smallmatrix} a \\ ki \end{smallmatrix}\right\} \right) T_{ja}^{\dots h}. \end{aligned} \quad (47.10)$$

从(47.6)当然有下面的定理。

定理 运动是仿射的直射变换。

其次, 从 (47.7) 以及使 (47.10) 适用于曲率张量的式子, 则得定理:

定理 对于运动有 $\mathcal{L} K_{kji}^{\dots h} = 0$, $\mathcal{L} \nabla_i K_{kji}^{\dots h} = 0, \dots$.

更从 (47.8), (47.9), (47.10) 得定理:

定理 对于仿射的直射变换, 协变微分与 Lie 微分是可交换的。

如果 ξ^h 与 η^h 规定了运动, 则

$$[\xi, \eta]^h = \xi^i \partial_i \eta^h - \eta^i \partial_i \xi^h$$

也规定一个运动, 这可用计算来证明。

今设空间内容许一个由 ξ^h 所规定的运动, 则 ξ^h 不能不满足

$$\mathcal{L} g_{ij} = \nabla_j \xi_i + \nabla_i \xi_j = 0, \quad \mathcal{L} \left\{ \frac{h}{j^2} \right\} = \nabla_j \nabla_i \xi^h + K_{kji}^{\dots h} \xi^k = 0.$$

这些式子可以看成是关于 ξ^h 与 ξ_i^h 的偏微分方程

$$\begin{aligned} \xi_{ji} + \xi_{ij} &= 0 \quad (\xi_{ji} = \xi_j^a g_{ai}), \\ \nabla_i \xi^h &= \xi_i^h, \quad \nabla_j \xi_i^h = -K_{kji}^{\dots h} \xi^k. \end{aligned}$$

这些偏微分方程的解内所含参数的最大个数是满足 $\xi_{ji} + \xi_{ij} = 0$ 的 ξ^h 与 ξ_i^h 的个数, 也就是

$$n + n^2 - \frac{1}{2} n(n+1) = \frac{1}{2} n(n+1).$$

因此, 有下面的定理。

定理 空间内容许的运动群的参数, 其最大个数是 $\frac{1}{2} n(n+1)$ 。

如果空间内容许这样最多参数的运动群, 那么, 以上的联立偏微分方程组就不能不是完全可积的。因此, 其可积条件

$$\begin{aligned} \mathcal{L} K_{kji}^{\dots h} &= \xi^i \nabla_i K_{kji}^{\dots h} - K_{kji}^{\dots a} \xi_a^h + K_{aji}^{\dots h} \xi_k^a \\ &\quad + K_{kai}^{\dots h} \xi_j^a + K_{kja}^{\dots h} \xi_i^a = 0 \end{aligned}$$

不能被任意的 ξ^h 以及适合 $\xi_{ji} + \xi_{ij} = 0$ 的 ξ_i^h 所满足。从这里可

計算出

$$K_{kji}^{a} = \frac{K}{n(n-1)} (\delta_k^a g_{ji} - \delta_j^a g_{ki}) .$$

因而得到下面的定理。

定理 如空間內容許最大次數 $\frac{1}{2} n(n+1)$ 的運動群，則空間是常曲率空間。